1　始めに

近年, 加速器の開発において、高エネルギー物理学分野における電子、及び陽子の加速という従来の利用法以外の新たな分野への応用の可能性が提案されている。その中での代表的な物として二例を挙げると、一つは医療、工業利用等民生分野における利用が簡便な大強度加速器の開発であり、もう一つはミュオンや短寿命核等の不安定粒子用加速器の開発である。この様な用途に適した加速器として FFAG(Fixed Field Alternating Gradient) 加速器が近年注目を浴びている。今回のテキストでは FFAG 加速器の概論として、まず FFAG 加速器の原理、及び FFAG 加速器中でのビームの振舞いについて議論する。なお、議論は主として現在 KEK で開発がおこなわれている radial sector 型の FFAG について行う。 次に FFAG 開発の現状として、まず FFAG の開発の歴史について簡単に説明し、近年 KEK で行われてきた FFAG 開発の状況を紹介する。そして最後に FFAG 加速器の将来として、現在議論が進められている FFAG を用いたミュオン加速や ADS (加速器駆動システム) 等 FFAG の様々な分野への応用について紹介する。

2　FFAG とは

FFAG(Fixed Field Alternating Gradient) 加速器とは, 時間的に一定の磁場で強集束の集束系を持つ加速器である。加速方式のよって FFAG シンクロトロン、FFAG ベータトロン等が考えられる。また、等時性を満たしていれば FFAG サイクロトロンとなるが、本テキストでは主に FFAG シンクロトロンについて議論を行う。

通常のシンクロトロンの場合、中心軌道を一定の位置に保つ為に磁場の強さを運動量の変化に伴って変化させる必要がある。それに対して、FFAG 加速器は時間的に一定の磁場を用いる為、運動量の変化に伴い、中心軌道が半径方向に移動して行く。磁場の強さを時間的に変動させる必要が無いため、FFAG においては加速時間は高周波加速空洞における加速電場勾配、及び高周波変調のみに依存する。その為、FFAG は通常のシンクロトロンに比べると格段に短い加速時間で粒子を加速する事が可能である。また、加速において、磁場と加速空洞を同期させる必要がない為、フィードバック制御等が必要なくなり、制御、及び運転が容易で工業分野などの民生分野での利用に適した加速器として注目されている。

3　FFAG の原理

FFAG 加速器では時間的に一定の磁場を用いる為、運動量の変化に伴い、中心軌道が移動して行く。このような加速器の磁場の形状にはどのような条件が課せられるかを考えてみる。

FFAG シンクロトロンの特徴としては

1. スケーリング則
   異なる運動量に対する閉軌道が全て相似
2. ゼロ色収差 (zero chromaticity)
   ベータトロン振動数が運動量によらず一定

以上の 2 点である。

このような条件について具体的に考察してみる。ある点 s における磁場の強さ B_0, 曲率半径 ρ において磁場勾配 n を次の様に定義する。

$$n(s) = -\frac{\rho(s)}{B_0}\frac{\partial B_z}{\partial r} \tag{1}$$

このとき、ベータトロン振動の式 $y'' + g(s)y = 0$ において、水平方向、及び垂直方向の運動に対して各々

$$g(s) = \frac{1-n(s)}{\rho(s)^2} \tag{2}$$

$$g(s) = \frac{n(s)}{\rho(s)^2} \tag{3}$$

と表される。ここで

$$C = 2\pi \cdot R \tag{4}$$

$$s = R\Theta \tag{5}$$

で定義される 独立変数 C, Θ を導入する。C は 1 周の軌道長、s は平衡軌道に沿った長さであり、R を

等価半径と呼ぶ。角変数 Θ の原点は図 1 に示される様に加速器中心から引いた直線が平衡軌道と直行する点をとる事とする。この様な点の軌跡を基準線とし、各軌道上で原点から $\Theta = const$ になる点の軌跡を spiral と呼び、spiral と半径方向の成す角 (spiral angle) を ζ であらわす。

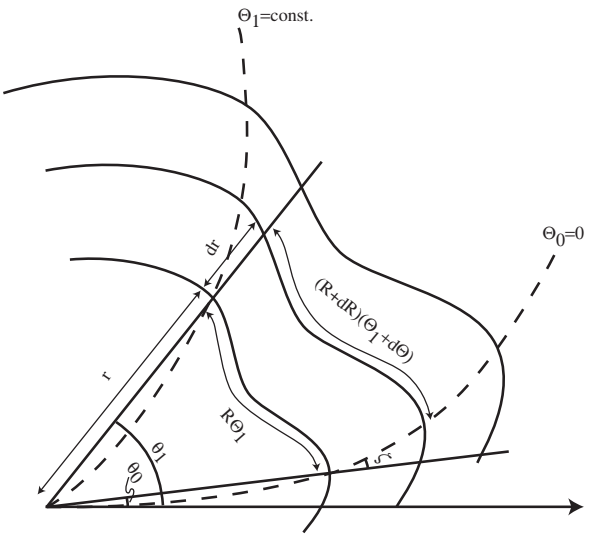


図 1: FFAG における平衡軌道を記述する記号の定義

この R, Θ を用いると水平方向、及び垂直方向のベータトロン振動の式は各々

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} + (1-n)\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 x = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d^2z}{d\Theta^2} + n\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 z = 0 \tag{7}$$

となる。これより、ゼロ色収差を満たす為には以下の条件を満たす必要がある、

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{R}{\rho}\right)|_{\Theta=const} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial n}{\partial p}|_{\Theta=const} = 0 \tag{9}$$

式 8 は運動量の異なる 2 つの平衡軌道上で任意の spiral と交わる 2 点での等価半径と曲率半径の比が等しいという事を意味しており、これは軌道の幾何学的な相似則を示している。式 9 は任意の spiral と交わる 2 点において n 値、つまり集束力が同じになる事を意味している。

ここで極座標 (r, θ) を考えると

$$(\Delta s)^2 = (r\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2 \tag{10}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta r}\right)^2} \tag{11}$$

となるが、軌道の相似性より

$$\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)_\Theta = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_\Theta^2} = const \tag{12}$$

となる。この時、$h \equiv r(\partial\theta/\partial r)_\Theta$ と定義すると、軌道の相似形を満たす為には Θ が一定である任意の spiral 上で

$$\theta \propto \ln r \tag{13}$$

を満たす事が必要である。

次に幾何学的な field index として k 値を次式の様に定義する。

$$k = \frac{s}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right)_\Theta \tag{14}$$

ここで $B = B_z|_{z=0}$ である。すると

$$k = \frac{s}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right)_\Theta = \frac{s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_\Theta \frac{r}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_\Theta \tag{15}$$

となるが、FFAG においては軌道の相似性より

$$\frac{s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_\Theta = const \tag{16}$$

が要求されるので、結果として

$$k \propto \frac{r}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_\Theta \tag{17}$$

となる。これより、任意の spiral で $\Theta = \text{const}$ 上の磁場に対して

$$B(r) \propto r^k \tag{18}$$

という条件が課される事になる。

磁場に N 回の周期性があると仮定すると、磁場は Θ に対して周期 $2\pi/N$ の周期関数になると同時に θ

に対しても周期 $2\pi/N$ の周期関数となる。したがって $F(\Theta)$ を周期 $2\pi/N$ の周期関数とすると最終的には FFAG が満たすべき磁場分布は

$$B(r,\theta) = B_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^k F(\theta - h\ln\frac{r}{r_0}) \qquad (19)$$

となる。ここで、F をどの様にするかで、FFAG の集束方式は分類される。FFAG 加速器の磁場形状として現時点において、radial sector 型と spiral sector 型 の二つが代表的な形式として与えられる。以下では各々の特徴について説明する。

3.1 Radial sector FFAG

radial sector 型の FFAG は 1950 年代に K.R. Symon[1]、T.Ohkawa[2] らによって提案された形式で、

$$B(r,\theta) = B_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^k F(\theta) \qquad (20)$$

つまり動径方向には一定の磁場形状を取る形式である。この場合、式 6,7 より、$n(=-k) > 1$ である磁場に対して安定なベータトロン振動を可能にする為には図 2 に示される様に磁場方向が交互に反転する様な磁場配置をとって磁場勾配を逆転させる事が必要である。これにより片方の極性が集束電磁石、もう片方の極性の物が発散電磁石として機能することになり全体として強集束系を構成する。また、片方の偏向角を大きくとる事で全体として円軌道を形成している。radial sector 型の FFAG ではビームが図 2 に示される様にうねった閉軌道をとる。電磁石の入射面、及び出射面が加速器中心からの線上に成るように取られ、粒子の軌道に対して垂直ではないので、edge focusing による集束、発散を受ける。

radial sector 型 FFAG には F 磁極、及び D 磁極の配置の仕方で大別して 3 種類に分類される。一つは F または D 磁極の両側に半割にした D または F 磁極を配置した triplet 型、F 磁極、D 磁極を離して設置した singlet 型、及び F、D 磁極を接続して設置

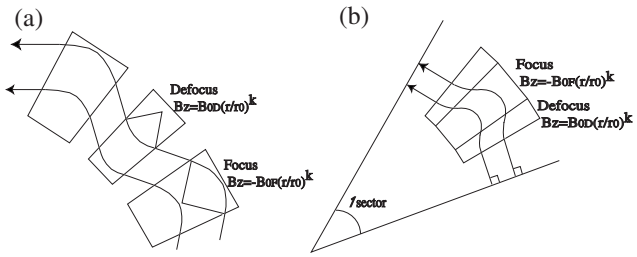


図 2: Radial sector 型 FFAG の磁場配置 (a):singlet 型 (b)triplet 型

した doublet 型である[1]。各々の形式の特徴について簡単にまとめる。radial sector 型では F 磁極、D 磁極の間に 1 セル当たり 2 つのストレートセクションが配置される。triplet 型、及び doublet 型では F 磁極、D 磁極をまとめて 1 つにしているため、F、D 磁極を分離した singlet 型に比べてストレートセクションの長さを長く出来るという利点がある。この点は特に小型の FFAG を設計する際には入出射機構、加速空洞等の設計の観点から見て、大きな利点と言う事が出来る。また、F 磁極と D 磁極を接近して配置する事による磁場クランプの効果で、この部分の磁場は鋭く変化し洩れ磁場の効果を抑える効果を期待できる。電磁石の円周方向への磁場の洩れは必然的に存在し、これが大きくなると、エッジフォーカスによる集束力が弱くなる。また、FFAG においては、洩れ磁場に半径方向の依存性があった場合、これによりベータトロン振動数に半径依存性が生じてしまう。このような効果を磁場クランプによって抑制している。triplet 型の別の特徴として、軌道の対称性からストレートセクション中心でのベータ関数、及びディスパージョン関数の傾きがゼロとなる為、入出射のマッチングが取りやすいという利点が上げられる。

磁極、及びコイルの単純さという点、これは FFAG 電磁石を超電導化する場合に重要になるが、この点では singlet 型、doublet 型は有利といえる。

[1] 現在までに KEK で開発されて来た FFAG は全て triplet 型の radial sector FFAG である。

3.2 Spiral sector FFAG

もう一つの代表的な FFAG の形式である spiral sector 型はD.W.Kerst[3] らによって提案された。spiral sector 型の場合は F はセクター数 N、及び動径角 θ の関数として

$$B(r,\theta) = B_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^k (1 + \Sigma f_n \cos[N\theta - N \tan\xi \ln(r/r_0)]) \tag{21}$$

の様に表される。ここで f は flutter factor といい、磁場の変動の大きさを表す係数であり、ξ は spiral angle である。この場合は radial sector 型の様に磁場の方向を交互に反転させるのでは無く、図 3 にしめされる様に spiral angle を持たせた同方向の磁場を並べていくという配置をとる。spiral sector 型は電磁石への入射角、出射角を大きくとってエッジフォーカスの効果を最大限利用する事で強集束を実現する。radial sector の様に磁場の方向を反転させる必要が無いため、radial sector に比べ加速器を小型化できるという利点がある。

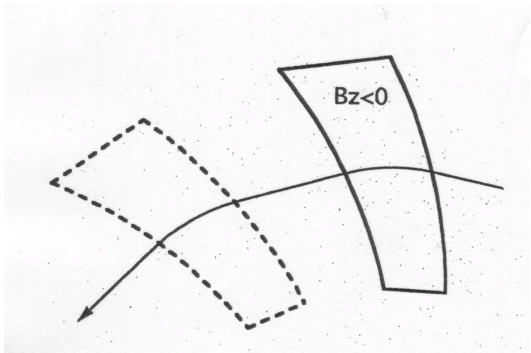


図 3: spiral sector 型 FFAG の磁場配置

4 smooth approximation によるFFAG加速器中のベータトロン振動

4.1 強集束磁場中の滑らかな近似 (smooth approximation) によるベータトロン振動

ξ を周期 2π の周期関数として以下の様な関数を定義する。

$$< F >_{AV} = \frac{1}{2/\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) d\xi \tag{22}$$

$$\{F\} = F(\xi) - < F >_{AV} \tag{23}$$

$$F' = dF/d\xi \tag{24}$$

$$F_1 = \int \{F\} d\xi \tag{25}$$

$$F_{n+1} = \int F_n d\xi \tag{26}$$

強集束磁場中での 1 次元での運動は $f(x,\theta)$ を θ に対して周期 $2\pi/N$ の周期関数として

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = f(x,\theta) \tag{27}$$

と表される。ここで N はセクター数である。 振動数 ν は周期 N に比べて十分に小さいと仮定した。式 27 の近似解として $x = X + \xi(X,\theta)$ とすると $X(\theta)$ は次式を満たす。

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = F(X) \tag{28}$$

ここで微小振動である $\xi(X,\theta)$ は θ に対して周期 $2\pi/N$ の周期関数であり、かつ $< \xi >_{AV} = 0$ である。ここから式 28 は

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = < f(X+\xi,\theta) >_{AV} \tag{29}$$

となる。これを一次の項までで近似すると $\xi = f_2(X,\theta)$ となる。これを式 28 に代入して、ξ の一次の項までの近似 (smooth approximation) を行うと最終的に

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = < f >_{AV} + < f_1 f_x >_{AV} \tag{30}$$

となる。式 27 で右辺が x に比例するとして $f(x,\theta) = g(\theta)x$ とすると、式 30 は

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = \left[< g_1^2 >_{AV} - < g >_{AV}\right] \tag{31}$$

となり、振動数 ν は

$$\nu^2 = < g_1^2 >_{AV} - < g >_{AV} \tag{32}$$

となる。

4.2 Radial sector 型 FFAG における smooth approximation によるベータトロン振動

それでは、上記の議論 radial sector 型 FFAG ではどのようになるか考えてみる。θ に関して周期 2π の周期関数、$\mu(\theta,r), \eta(\theta,r), \epsilon(\theta,r)$ を以下の様に定義する。

$$\mu(\Theta,R) = r/\rho(\Theta,R) \tag{33}$$
$$dr = \eta dr \tag{34}$$
$$d\theta = \epsilon dR/R \tag{35}$$

この時、

$$\frac{d\epsilon}{d\Theta} = \mu\eta - 1 \tag{36}$$
$$\frac{d\eta}{d\Theta} = -\mu\epsilon - \int r\frac{\partial\mu}{\partial R}d\Theta \tag{37}$$

ここで式 36 を満たす解として μ を以下の様に表す。

$$\mu = 1 + fg(N\Theta) \tag{38}$$

ここで、$g(N\Theta)$ は周期 2π の周期関数で、平均 0、二乗平均 $1/2$ となる様に規格化したものであり、g は flatter factor と呼ばれ、F 磁極と D 磁極の磁場の間の相対的な強さの比である。運動量 p の粒子が半径 R にいる時

$$pc = eB\rho = eBr/\mu \tag{39}$$

これを r で偏微分して

$$B\frac{\partial\rho}{\partial R} + \rho\frac{\partial B}{\partial R} = \frac{c}{e}\frac{\partial p}{\partial R} \tag{40}$$

を得る。これを n 値 $(n = -\frac{\rho}{B}\frac{\partial B}{\partial r})$ に代入すると

$$n = \frac{\partial\rho}{dR} - \rho\frac{\partial \ln p}{\partial R} \tag{41}$$

となる。式 36∼38 を用いると

$$n = -\frac{1}{\eta\mu^2}\left[k\mu + \epsilon\frac{\partial\mu}{\partial\Theta} + R\frac{\partial\mu}{\partial R}\right] \tag{42}$$

また μ の定義 (式 33) より, 縦方向、横方向のベータトロン振動の式は各々

$$\frac{dx^2}{d\Theta^2} = \mu^2(1-n)x \tag{43}$$

$$\frac{dx^2}{d\Theta^2} = \mu^2 nx \tag{44}$$

となる。式 29 より

$$\mu^2 n = -\frac{1}{\eta}\left(k\mu + \epsilon\,\frac{\partial\mu}{\partial\Theta} + R\frac{\partial\mu}{\partial R}\right) \tag{45}$$

とかける。式 40、41 より

$$\mu^2(1-n) = \frac{(k+1)\mu}{\eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial^2\mu}{\partial\Theta^2} \tag{46}$$

従って、滑らかな近似では、縦方向、横方向のベータトロン振動数は各々

$$\nu_x^2 = < \mu^2(1-n) >_{AV} + \tag{47}$$
$$< \{\mu^2(1-n)\}_1^2 >_{AV} \tag{48}$$
$$\nu_z^2 = < \mu^2 n >_{AV} + < \{\mu^2 n\}_1^2 >_{AV} \tag{49}$$

となる。radial sector 型 FFAG でセクター数 N が大きい場合 η を含む項は無視出来て、最終的に

$$\nu_x^2 = k + 1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} < g_1^2 >_{AV} \tag{50}$$
$$\nu_z^2 = -k + \frac{f^2}{2} + \frac{(k-1)^2 f^2}{N^2} < g_1^2 >_{AV} \tag{51}$$

これより、radial sector 型 FFAG においては水平方向のベータトロン振動数はセクター数と k 値のみで決まるが、垂直方向については更に f の関数でもあるため、F 磁極と D 磁極の相対的な強さを変える事でも調整が可能だということが分かる。

5 FFAG の設計

1950 年代に FFAG が提案された当時、FFAG の設計は解析計算によって行われていた。その理由としては、FFAG の開発に重要な 3 次元磁場の数値計算が当時は計算機技技術が未成熟であった為、満足できる計算ができなかった事、また、仮に 3 次元磁場が計算によって得られたとしてもそれを用いて軌道計算を行い設計に反映させる事が、これまた計算機が未発達であった為、不可能であった、という理由によるものであった。しかし昨今の計算機技術の発達により、当時は不可能であった 3 次元計算磁場を用いたトラッキングシミュレーションが可能に成り、より信頼性の高い加速器設計が出来るように成った為、設計の手法もそれに伴い変化している。ここでは、現在の FFAG の設計手法に付いて簡単に説明を行う。

FFAG の設計は次の様な手順で行われる。

1. 線形モデルで FFAG を近似してセル数、F、D での曲げ角、k 値等の基本的なパラメーターを決定する。
2. 1 で求めたパラメータを元に電磁石形状を決定する。
3. 2 で求められた形状に対して 3 次元磁場計算を行う。
4. 3 で得られた磁場を使ってトラッキングシミュレーションを行う。
5. 2∼4 を満足な結果が得られるまで繰り返す。

以上の一連の流れを triplet 型 radial sector FFAG を例にあげて解説する。

5.1 FFAG 電磁石

設計の詳細に移る前に FFAG 電磁石について簡単に説明する。

式 20 で表される field index を持つ偏向磁場を形成する磁石としては大きく分けて 2 種類の型が現時点では考えられている。一つは式 20 の磁場を磁極形状で形成する型 (以下「ポール型」) であり、もう一つは式 20 の磁場をコイルに流す電流分布により形成する型 (コイル型) である。コイル型には電流の位置分布を直接つくる事で磁場を形成する型と多極磁場の重ね合わせで磁場を形成する物 [4] など様々な型が提案されている。コイル分布で磁場を作る型の電磁石のコイル配置の一例、及びそれによって作られる磁場の 3 次元磁場計算の結果を図 4,5 に示す。図 4 の場合、磁極の周囲に巻かれた主コイルで全体の磁場を発生し、ぞの内側のトリムコイルで磁場勾配を形成している。

ポール型の代表的な物は KEK で開発されてきた一連の radial sector 型の FFAG 用磁石である。この場合、必要な k 値に対して磁極間隙 (g) の形状は $g = g_0(r/r_0)^{-k}$ という式で決定される[2]。

ポール型の代表的な物は KEK で開発されてきた一連の radial sector 型の FFAG 用磁石である。この場合、必要な k 値に対して磁極間隙 (g) の形状は $g = g_0(r/r_0)^{-k}$ という式で決定される[3]。ポール型の典型的な磁極形状を図 6(a) に示す。

ポール型の特徴について簡単に説明する。まず利点としては磁極表面は機械加工で整形される為、高精度の製作が可能であるという点、また、通常の偏向電磁石と基本的に同じ構造であるので、構造が単純な為、製作が簡単な点が挙げられる。不利な点としては磁極間隙を中心からの半径に応じて変化させることが必要なため、洩れ磁場の効果の半径方向の依存性が出て来てしまい、これが振動数のふらつきの原因となる。また、この洩れ磁場の位置依存性により、あまり半径方向に大きな電磁石をつくる事は困難で、加速できる運動量幅に制限が出て来てしまう。現在の所、運動量比で 3∼4 倍程度がベータトロン振動数のずれ量から考えて安定に加速できる限度とされている。

コイル型 FFAG 電磁石は現時点では実機としては

[2] 実際には後述するように磁場の飽和、洩れ磁場等の影響でこの式からずれる

[3] 実際には後述するように磁場の飽和、洩れ磁場等の影響でこの式からずれる

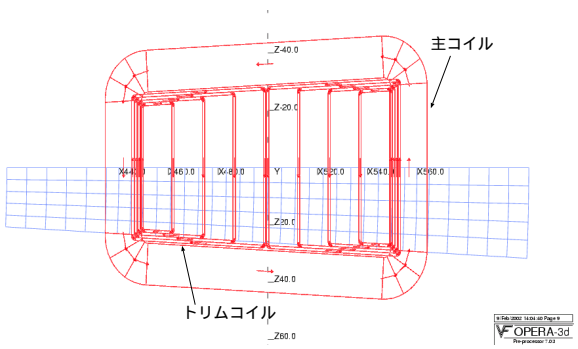


図 4: コイル型 FFAG 電磁石のコイル配置

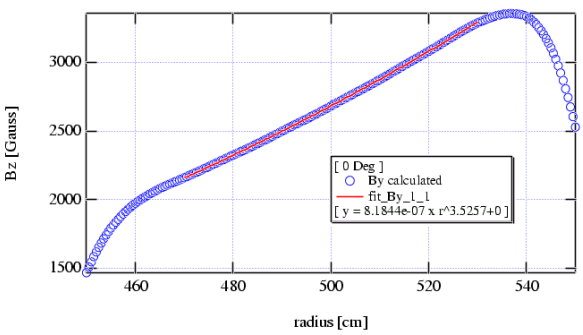


図 5: 図 4 のコイル型 FFAG 電磁石による磁場分布

存在していない。後述する PRISM においては、コイル型を採用しようと現在シミュレーションによる検討が進んでいる。コイル型の利点としては、洩れ磁場の影響の位置依存性が抑制されている、という点が挙げられる。そのため、運動量比もポール型に比べて大きく出来る可能性がある。また、ポール型では k 値は製作段階で決定したらそれを後から偏向する事は不可能だが、コイル型では電流分布を偏向する事で k 値を変更する事が可能と考えられている。その半面、コイルの製作及び設置精度で磁場の精度が決まるため、磁場精度の点で問題が予想される。磁場精度という意味では、図 5 を見ると一見滑らかで必要な磁場が形成されている様に見えるが、コイルの分布という離散的な分布で磁場を形成する以上、局所的にみると、磁場勾配のバラツキが必然的に発生してしまう。これを実用上問題ない水準まで抑え込む事ができるか、と言うことも慎重な検討が必要な問題である。

また、多系統の電流を一台の磁石に供給しなければ成らなくなるため、磁石及びコイルの構造が複雑に成るという問題も予想される。

5.1.1 ヨークフリー型電磁石

triplet 型 FFAG 電磁石は磁場の向きを互いに反転させた combined function 型電磁石を 3 つ並べた物である。すると、図 6 に示される様に F 磁極、D 磁極はそれ自身互いが互いのリターンヨークの役割を果たす事が出来る。これにより、電磁石側面のリターンヨークを大幅に減らすして、磁石側面にフリースペースを作ることが出来る。此は後述する 150MeV FFAG の設計に際して考案されたアイデアで、これにより、従来の FFAG 電磁石の問題点であった入射、取り出しの為のスペース不足という問題を取り除く事ができた。また、磁石重量の大幅な削減も利点の一つにあげる事が出来る。図 7 にヨークフリー電磁石の実機の例として 150MeV FFAG 用電磁石を示す。この磁石では大半の磁場は F 磁極に巻かれたコイルで発生される。この磁石においては四隅のリターンヨークは上の磁極を支える役割だけでなく、主コイルが発生した磁束の一部を通す事により、D 磁極に巻かれた補正コイルと協同して F 磁極と D 磁極の相対的な磁場の強さを調整する事を可能にしている。

5.2 線形モデルによる近似

まず、FFAG 設計の第一段階である線形近似による加速器パラメータの決定に付いて議論する。

FFAG は加速と共に軌道位置が変化していくが、あるエネルギーで固定して考えれば FFAG の集束系は値が一定の集束力と発散力をもった線形な集束系で置き換える事が可能である。この置き換えが可能であるという事は通常のシンクロトロンの設計において SAD 等の軌道計算コードを用いて偏向磁石及

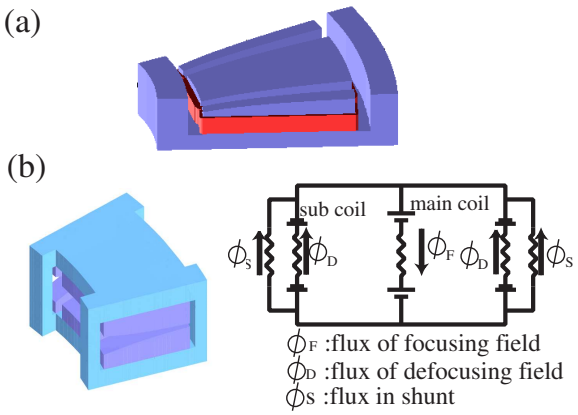


図 6: ヨークフリー電磁石 (a):通常の triplet 磁石、(b):ヨークフリー電磁石、(c)：ヨークフリー電磁石の磁気回路

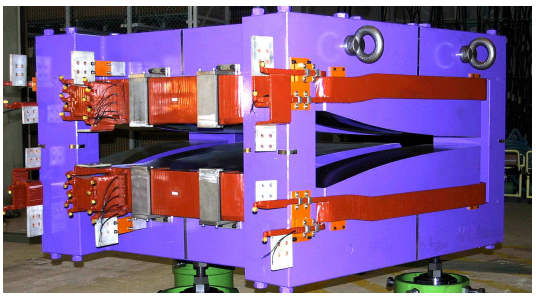


図 7: ヨークフリー電磁石の外観 (150MeV FFAG 用電磁石

び四極磁石の強さを求める時と同じ手法で FFAG の基本的な設計が可能であると言う事を意味している。

SAD 等の計算コードを用いて軌道計算を行うには閉軌道の軌道長、磁石への入出射角等の幾何的な値を評価しておく必要がある。まず 図 8 の様に triplet 電磁石をモデル化して、表 1 にまとめた様に記号を定義する。

対称性を利用して集束電磁石 (正磁場の電磁石で以後 F 磁石と呼ぶ。同様に逆磁場の電磁石は以後 D 磁石と呼ぶ。) の中心線までを 1 つの単位として議論する。また、F、D とも磁場勾配をもった偏向電磁石、いわゆる combined function 型の電磁石として扱う。この時、軌道計算に必要な入力値としては幾何学的な形状、曲げ角、及び四極成分の平衡軌道にそった積分値である。

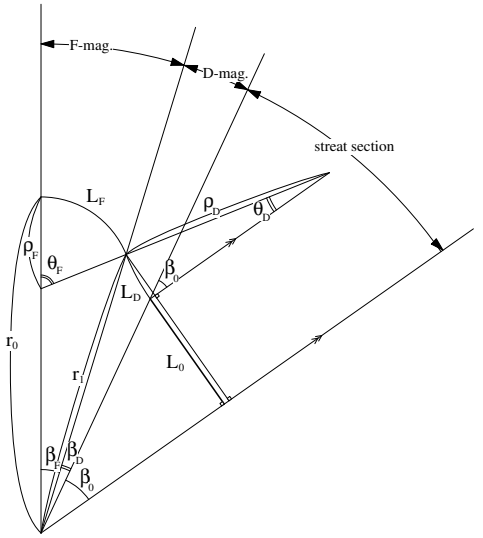


図 8: triplet radial sector FFAG の線形近似モデル (triplet 集束系の最小単位の 1/2

表 1: 図 8 の記号の定義

N		セクター数
k		k 値
β_F		1/2 F 磁石を中心から見込む角度
β_D		1/2 D 磁石を中心から見込む角度
θ_F		1/2 F 磁石での曲げ角
θ_D		D 磁極での曲げ角
ρ_F		F 磁極での曲率半径[4]
ρ_D		D 磁極での曲率半径
L_F		1/2 F 磁極での軌道長 ($= \rho_F\theta_F$)
L_D		D 磁極での軌道長 ($= \rho_D\theta_D$)
r_0		F 磁極中心での軌道半径
r_1		F 磁極出口での軌道半径

まず、F 磁極で成立する関係としては

$$r_1 \sin\beta_F \quad = \quad \rho_F \sin\theta_F \tag{52}$$

$$r_1 \cos\beta_F = r_0 - \rho_F + \rho_F \cos\theta_F \quad (53)$$

$$(54)$$

であるので

$$\frac{\rho_F}{r_0} = \frac{\tan\beta_F}{\sin\theta_F + (1-\cos\theta_F)\tan\beta_F} \quad (55)$$

D 磁極の領域では

$$\rho_D \sin\theta_D = r_1 \sin\theta_1 - r_1 \cos\theta_1 \tan\theta_2 \quad (56)$$

$$+\rho_D(1-\cos\theta_D)\tan\theta_2 \quad (57)$$

という関係が成り立つ。ここで、

$$\theta_1 = \frac{\pi}{N} - \beta_F \quad (58)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{N} - \beta_F - \beta_D \quad (59)$$

$$\theta_3 = \theta_F - \frac{\pi}{N} \quad (60)$$

である。

$$\theta_D = \theta_F - \frac{\pi}{N} \quad (61)$$

$$r_1 = \frac{\rho_F \sin\theta_F}{\sin\beta_F} \quad (62)$$

という関係が成立するので、D 磁極と F 磁極の間には

$$\frac{\rho_D}{\rho_F} = \frac{\sin\theta_F}{\sin\beta_F} \frac{\sin\theta_1 - \cos\theta_1 \tan\theta_2}{\sin\theta_3 - (1-\cos\theta_3)\tan\theta_2} \quad (63)$$

また、edge 角 (ϵ) を曲げ角との比で表すと、F 磁極の両端では

$$\epsilon_F = \frac{\theta_F - \beta_F}{2\theta_F} \quad (64)$$

F 磁極側の D 磁極では

$$\epsilon_{D1} = \frac{\theta_F - \beta_F}{\theta_D} \quad (65)$$

直線部側の D 磁極では

$$\epsilon_{D2} = -\frac{\frac{\pi}{N} - \beta_F - \beta_D}{\theta_D} \quad (66)$$

となる。以上の関係を用いれば、磁石の占める角度 (β_F, β_D) と F 磁極での曲げ角 (θ_F) を決めると、軌道計算コードに必要な入力値が全て求められる。ただし

$$\theta_F < \frac{\pi}{2} + \beta_F \quad (67)$$

また、$B/B_0 = (r/r_0)^k$ で定義される field index k を用いて偏向電磁石が持つ四極成分 (平衡軌道に沿った積分値)$k'L$ を以下の様にして決める。

$$\left[\frac{dB}{dr}\right]_{r=r_0} = \frac{kB_0}{r_0} \quad (68)$$

であるので

$$k'L = \frac{L}{B\rho}\frac{dB}{dr} = \frac{kL}{\rho r_0} \quad (69)$$

以上で得られた入力値を用いて SAD 等の軌道計算コードで基本パラメータを決定する。

典型的な例として後述する 150MeV FFAG の SAD での結果を図 9、及び表 2 に示す。ここで外的な制約条件として、最大磁場強度は 1.6 T 程度、平均半径 5m 程度、入射エネルギーと出射エネルギーの間の軌道の移動量は 70cm 程度と行った制約を課した。

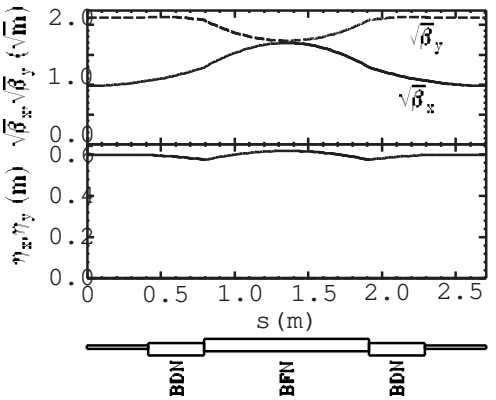


図 9: 150MeV FFAG の SAD により得られた lattice 関数

表 2: 線形近似 (SAD) によって得られた 150MeV FFAG の設計パラメータ

磁石形式	triplet
セル数	12
k 値	7.5
1/2 F 磁極の見込む角度	0.106 rad.
1/2 F 磁極の曲げ角度	0.073 rad.
D 磁極の見込む角度	25deg.
D 磁極の曲げ角度	-10deg.
最大磁場強度	1.44 T
F/D 比	2.51
ベータトロン振動数 (H/V)	3.53/1.31

5.3 磁場設計

線形近似によって計算された基本的なパラメータを基にその磁場分布を実現するような磁石を TOSCA-3D の様な 3 次元磁場計算コードを用いて磁場計算を行う。それを用いてトラッキングを行い、磁場分布、振動数の安定性等を考慮して設計の最適化を行う。ここでは代表的な例として 150MeV FFAG 用 triplet 磁石を例にとってその過程を紹介する。

磁場形状の最適化にあたって留意すべき事について簡単にまとめる。なお、以下で紹介する計算は全て TOSCA 3D を用いて得られた。

FFAG においては FD 比が小さくなるにつれ閉軌道のうねりは大きくなる。閉軌道のうねりが大きくなると線形近似での近似誤差によって、特に垂直方向のベータトロン振動数が小さくなる方向にずれてしまう。従って、垂直方向のベータトロン振動数を確保する為に FD 比を線形近似の値より小さくとる必要がある。FD 比を小さくするには発散磁場を強くすればよいが、発散磁場を強くすると D 磁石での曲げ角が大きくなる。結果として F 磁石での曲げ角も大きくとらねば成らなくなるため、集束磁場も強くしなければ成らない。すると F 磁極における磁場の飽和が問題になってくる。

また、磁極の長さが磁極間隙に比べて十分に大きいときは磁極中心部でほぼ理想的な磁場分布となるが、磁極の端部では洩れ磁場により理想的な磁場分布からずれてしまう。 結果として、理想的な磁場分布を仮定したゼロ色収差はもはや成り立たず、ベータトロン振動数は加速の間、変化して行くことになる。

以上の事を念頭において設計作業を進めることになる。設計の過程での試行錯誤の詳細については割愛するが、設計の際の指針となる図を紹介して設計の過程の紹介とする。FFAG の電磁石において重要なのは局所的な磁場形状が必要な k 値を持った磁場勾配をもっている事ではなく、BL 積としての値が必要な値になっている事である。ここで言う BL 積とは 1 セクター分の磁場を集束磁場と発散磁場に分け各々を各半径の円周上で積分したもので、理想的には半径の (k+1) 乗になる。洩れ磁場、磁場飽和の影響が無視できる理想的な場合、$g = g_0(r/r_0)^{-k}$ に従って磁場間隙をつくってやれば、必要な磁場が出来ることになるが、実際には洩れ磁場の影響の為、図 10 に示される様に DFD triplet 磁石では特に D 磁極の方に B·L で見た場合に設計値からの大きなずれが生じる事になってしまう。結果として、ベータトロン振動数も図 11 に示される様に大きく変動し、整数共鳴、半整数共鳴等の強い共鳴を横切る事になってしまう。

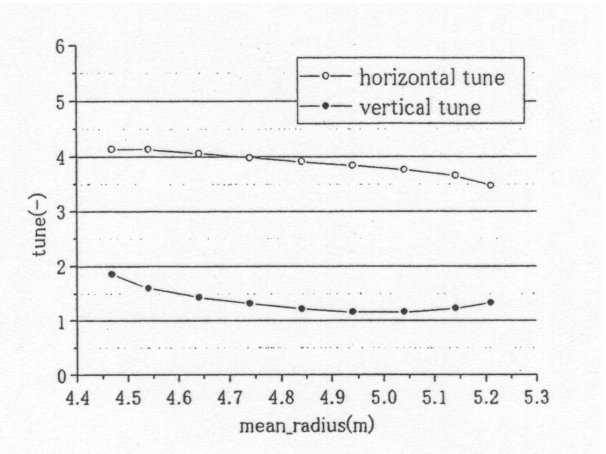


図 11: 図 10 の場合におけるベータトロン振動数の軌道半径依存性

その他にも半径外側の磁場飽和等の問題があり、

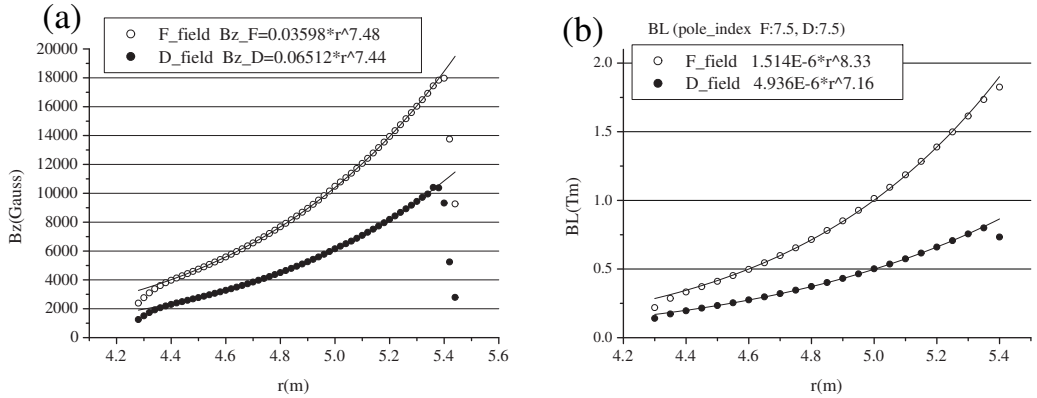


図 10: 150MeV FFAG 用 triplet 電磁石の磁場計算例 (磁極形状を k=7.5 で作った場合)(a):B_z 分布、(b):Bl 積の分布

それらを解決する為に以下の様な処方を施した。

- BL 積として、必要な値に成るように k 値を修正した。
- 半径内側の領域は磁極間隙が大きいため、k 値の修正では対応しきれない。そこで、全長 1.1 m の磁極の内、半径内側 20cm については半径 20cm の点での磁場分布の接線で延長して磁極間隔と縮めた。
- 半径外側の磁場飽和の影響を緩和するために、図 12 に示す様にロゴスキーカットの原理を応用して集束電磁石の外側に幅 6cm、角度 45° のパッチを付けた。これでも、半径外側の集束電磁石中での磁場強度の低下は修正しきれない為、発散電磁石の外側の形状を修正して、発散電磁石の磁場を最大 10% 程度広くした。

最終的に振動数ダイアグラム上での振動数の変移の考慮にいれて、k 値の微調整を行い、最終的な形状を決定した。その際考慮を払ったのは以下の点である。

- 半径外側の軌道で水平方向のベータトロン振動数が半整数共鳴に近付く事を避けるため、k 値を 7.5 から 7.6 に変更した。
- 水平方向のベータトロン振動数 4.0 は三次の共鳴の中でも特に強い物である。それはベータトロン振動の共鳴条件

$$m\nu_x + n\nu_z = k(m, n, k : \text{整数}) \tag{70}$$

($q = |m| + |n|$ は共鳴の次数)、及び構造共鳴の条件

$$k = Ni(N \text{ は } 1 \text{ 周あたりの構造周期、} i \text{ は整数}) \tag{71}$$

を考え合わせると、ハーモニクス k=12 はセクター数と一致してしまう為、据付誤差等がとりわけて無くても FFAG 磁石が本来持つ六極成分により、共鳴が誘起されてしまう為である。その為、水平方向のベータトロン振動数を 4.0 から遠ざけた。
- 加速中に三次までの共鳴線を横切るのは避ける。

最終的な磁場形状を図 13 に、ベータトロン振動数を図 14,15 に示す。また、最終的な磁極形状を図 16 にまとめた。

5.4 磁場測定

FFAG の開発において、三次元磁場計算の信頼性は設計の鍵を握るといっても過言ではない。その為、

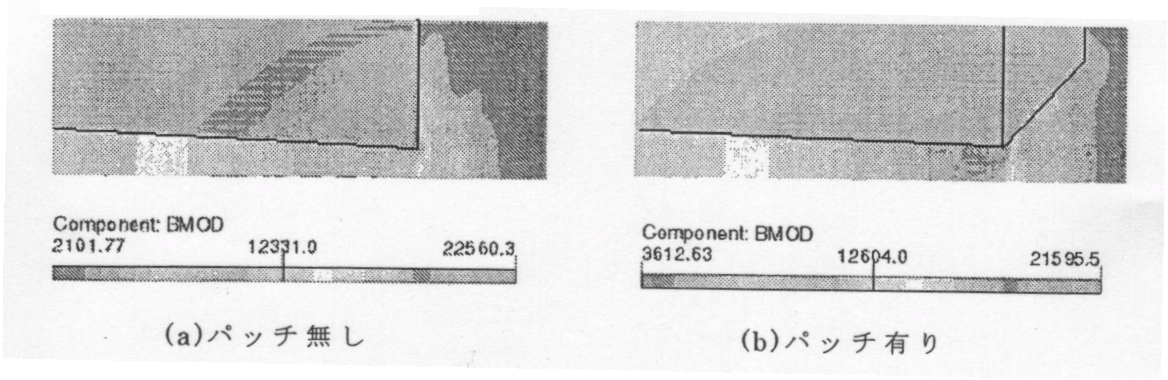


図 12: 集束電磁石中での磁束分布 ((a) パッチ あり、(b) パッチ無し

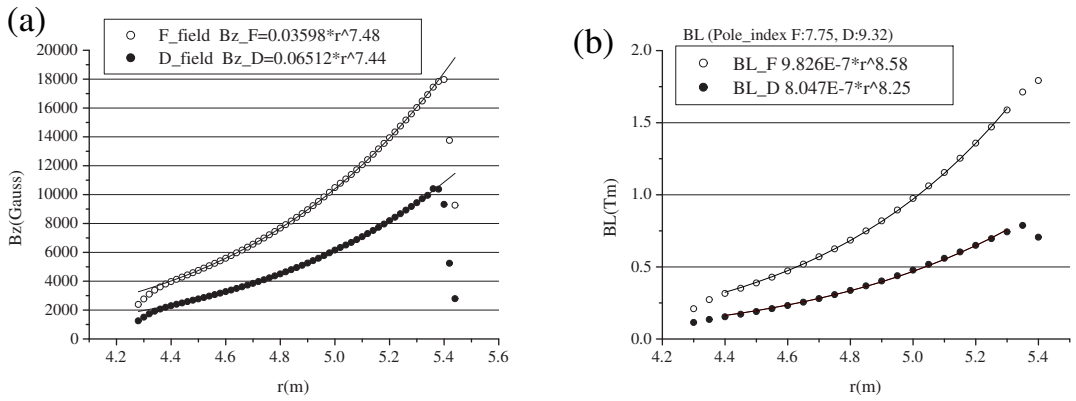


図 13: 150MeV FFAG 用 triplet 電磁石の磁場形状 (最終的な形状) (a):B_z 分布、(b):Bl 積の分布

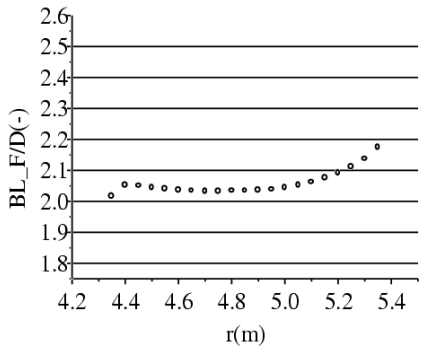


図 14: 150MeV FFAG 用 triplet 電磁石 の最終的な形状におけるベータトロン振動数の軌道半径依存性

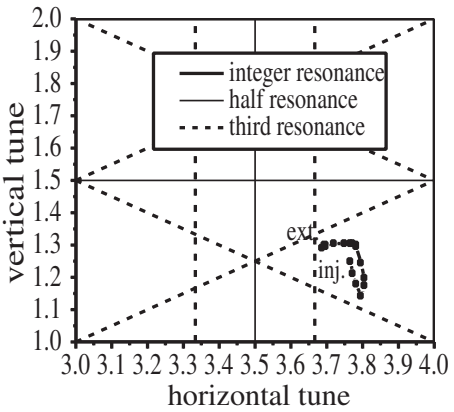
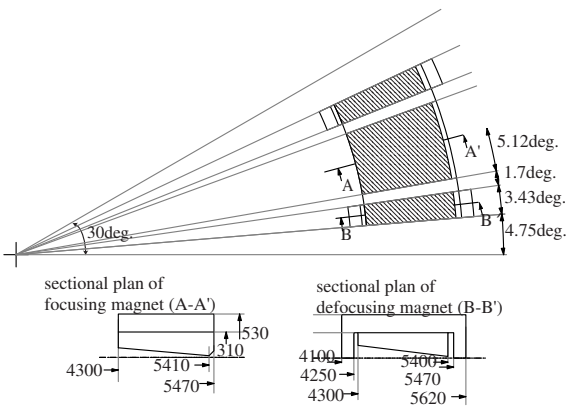


図 15: 図 13 の場合におけるベータトロン振動数の振動数ダイアグラム中での変移



$$halfgap = -0.156 \times (r - 4475) + 90.079 \quad (4300 < r < 4475) \quad (72)$$

$$halfgap = 21 \left(\frac{5400}{r} \right)^{7.75} \quad (4475 < r < 5410) \quad (73)$$

$$halfgap = -0.156 \times (r - 4475) + 90.079 \quad (4300 < r < 4500) \quad (74)$$

$$halfgap = 20 \left(\frac{5400}{r} \right)^{9.32} \quad (4500 < r < 4900) \quad (75)$$

$$halfgap = 39.9 \left(\frac{4900}{r} \right)^{11.555} + 9.57 \quad (r = 4900 < r < 5400) \quad (76)$$

図 16: 150MeV FFAG 用電磁石の最終形状

設計された電磁石の詳細な磁場測定は特に開発の初期段階では必須である。ここでは前節 (5.3) で紹介した 150MeV FFAG 用 電磁石 を例にとって FFAG 電磁石の実際の磁場分布について簡単にまとめる [9]。

150MeV FFAG 電磁石の磁場の測定としては 2 種類の測定を行った。

1. 電磁石全台 (12 台) に対して median plane における垂直方向の磁場測定を行い、電磁石間のバラツキの評価を行う。

2. 1 台の電磁石に対して、3 次元磁場測定を行い、三次元磁場計算の信頼度の評価を行う。

以上である。図 17 に典型的な結果を示す。測定結果の詳細については割愛するが、まず、三次元磁場測定の結果より、計算値と 1% 程度の誤差で一致すると事が分かった。また、12 台のバラツキにたいしては 0.2% 以内である事が分かった。誤差の大部分は測定器を設置する際の不確定性に起因するものが大部分であり、実際の精度はさらに良いと予想される。

少なくとも radial sector 型 FFAG の設計においては三次元磁場計算は十分信頼できると結論出来る。

6 FFAG のアクセプタンス

6.1 FFAG の磁場構成とアクセプタンス

大アクセプタンスは FFAG 加速器の特徴としてしばしば言及される。FFAG の磁場構成はセル数と k 値で決定出来る。そこで、セル数と k 値の関数として FFAG の水平方向のアクセプタンスを評価を試みた。この際、計算量の関係で磁場は三次元数値計算の磁場では無く、洩れ磁場の影響を thin lense で近似する いわゆるハードエッジモデルを用いた。この計算では表 3 に示される 2 例のリングを典型的なリングとしてアクセプタンスの評価を行った。

表 3: ハードエッジモデルでの水平方向のアクセプタンス評価に用いたリングのパラメーター

磁石形式	triplet	triplet
セル数	32	16
k 値	50	15
軌道移動長 (m)	0.5	0.77
平均半径 (m)	21	10
B@F/D(T)	1.8/1.8	2.8/2.8
F/2(rad.)	0.026	0.052
D(rad))	0.018	0.036
位相進み/1 セル (度) H/V	121/61	131/103

計算方法の詳細は割愛するが、上記のモデルを用

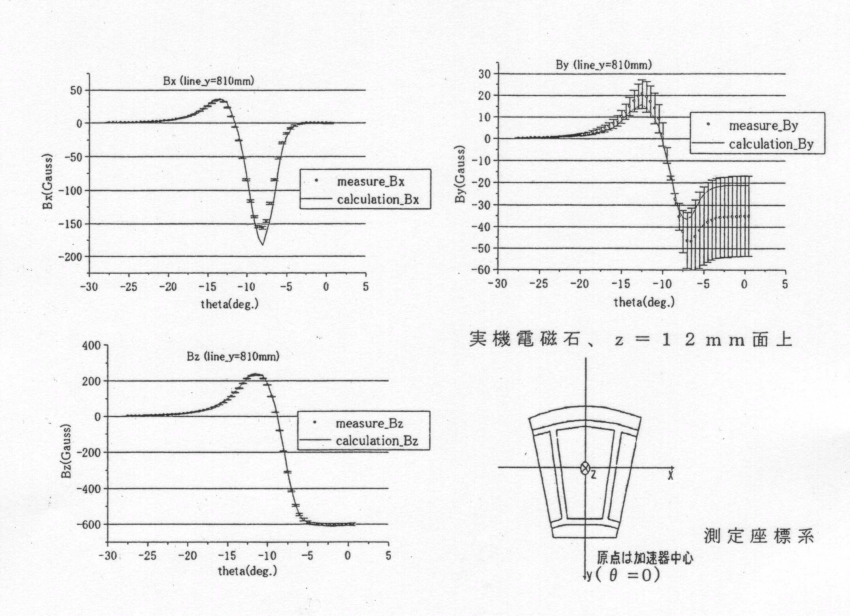


図 17: 150MeV FFAG 電磁石における三次元磁場測定結果

いて Runge-Kutta 法でトラッキングを行い 128 ターン以上周回した粒子が描く位相空間上での軌跡をプロットした。図 19 に水平方向のアクセプタンスの典型的な例である。FFAG の磁場は半径の k 乗に比例して変化して行くという性質上、本質的に高次の磁場成分を持つ。その高次成分の影響の為、振幅が大きくなると図 19 に示されている様に粒子の軌跡が楕円からずれて行く。そこで、アクセプタンスとして、128 ターン周回した粒子が描く軌跡を安定領域と定義し、その外縁の面積を π で割った値をアクセプタンスとして評価した。図 18 に表 3 における水平方向アクセプタンスを 1 セルあたりの位相の進みの関数として示した。

この結果より、

1. 1 セル当たりの位相の進みが大きくなるほどアクセプタンスは小さくなる。

2. 1 セル当たりの位相の進みが 120 度、90 度、72 度等の構造共鳴に近くなるとアクセプタンスが急激に減少する。

これらの傾向はベータトロン振動の共鳴と磁場の高次成分の影響によると考えられる。

k 値、セル数が違う 2 つのリングで同じ傾向を示すことから、上記の 2 つの傾向は絶対値に関する何

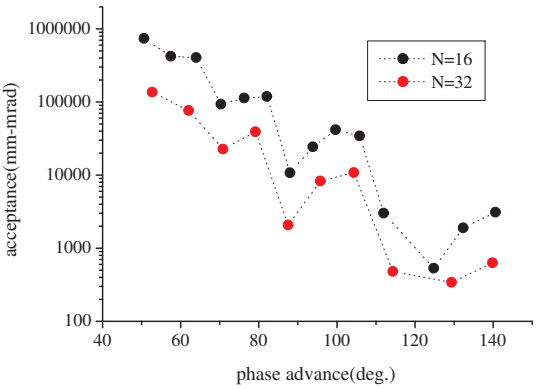


図 18: 2 つのリングにおける水平方向アクセプタンス (表 3 参照)

らかの規格化が成され得ると考えられる。

式 20 で表される磁場に対してある r_0 においてテイラー展開を施す。

$$B = B_0 \cdot [1 + \frac{k}{r_0}\Delta r + \frac{k(k-1)}{2r_0^2}\Delta r^2 + \quad (77)$$

$$\frac{k(k-1)(k-2)}{3r_0^3}\Delta r^3 + \cdots] \quad (78)$$

ここで $r = r_0 + \Delta r$ である。式 77 において二次以上の成分 (6 極成分以上) は大振幅における振動数シフトの原因となる。図 18 において評価したアク

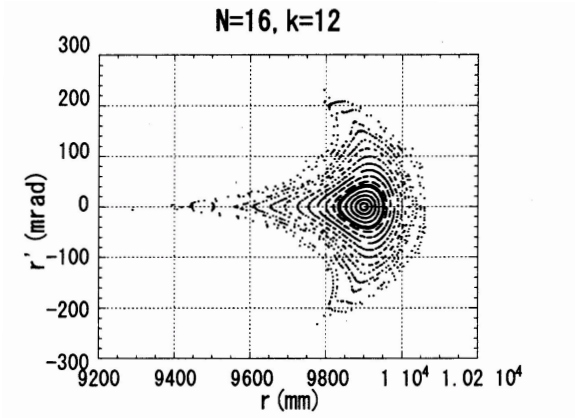


図 19: 水平方向のアクセプタンスの計算例

セプタンスは評価の際に設定した周回数 (今回の場合は 128 ターン) の内に粒子が発散してしまう程度に強い共鳴によってその大きさが決めらると考えられる。

通常の FFAG の場合 $k \gg 1$ なので、この場合については式 77 は

$$B = B_0 \cdot [1 + (\frac{k}{r_0}\Delta r) + \frac{1}{2}(\frac{k}{r_0}\Delta r)^2 + \quad (79)$$

$$\frac{1}{3}(\frac{k}{r_0}\Delta r)^3 + \cdots] \quad (80)$$

の様に近似的に書き表される。k, r_0 が異なる任意のリングにおいても、位相の進みを固定した時には $k/r_0\Delta r$ によってアクセプタンスが決定されると考えられる。

最後に $k/r_0\Delta r$ とエミッタンスの間の関係について考える。エミッタンス W はベータ関数 β と振幅 Δr を用いて

$$W \cong \Delta r^2/\beta \quad (81)$$

の様に表される。ここで以下の近似式

$$\beta \cong r_0/\nu_n \quad (82)$$

$$\nu_n \cong \frac{k}{N^2} \times N = \frac{k}{N} \quad (83)$$

を用いるとエミッタンスは

$$W \cong \Delta r^2 \left(\frac{k}{r_0 N}\right) = \frac{r_0}{kN}\left(\frac{k}{r_0}\Delta r\right)^2 \quad (84)$$

と書き換えられる。この結果を用いて図 18 の結果を r_0/kN で規格化したものが図 20 である。これから k, N, r_0 と位相の進みを決めれば、ある程度アクセプタンスを大まかには評価できると言うことがわかる。

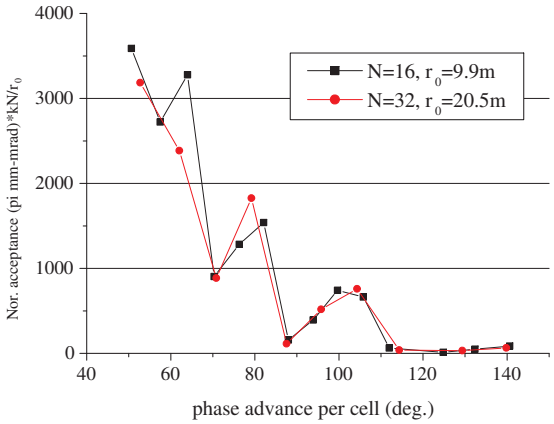


図 20: 規格化した水平方向のアクセプタンス

この水平方向のアクセプタンスについては PoP FFAG において入射エラーを変化させて、測定実験が行われている。詳細は 10.1.4 を参照のこと。

ここで見て来た様に FFAG においてはゼロ色収差を実現する為に式 20 で表される様な高次の磁場成分を含む磁場形状を採用している。 その結果として、上で議論したような大アクセプタンスを実現している。 この様な強い非線形性を加速器の必須の要素とする加速器は現時点では FFAG の他に存在しない。その意味で FFAG におけるビーム力学の研究は非線形性の強い力学系のユニークな研究の対象となりうると思われる。いずれにせよ、FFAG におけるビーム力学の研究は端についたばかりであり、このアクセプタンスの問題以外にもまだまだ興味深い問題が秘められていると思われる。

7　FFAG における粒子加速

FFAG シンクロトロンの特長である、固定磁場、及び速い加速を用いると、従来のシンクロトロンでは見られない新しい粒子加速の可能性が開けて来る。ここでは、共鳴線を渡る加速、及びマルチバンチ加速と言った FFAG ならではの粒子加速のアイデアについて紹介する。

7.1　共鳴を渡る粒子加速

FFAG シンクロトロンはシンクロトロン加速をするといいう意味では通常のシンクロトロンと同じである。しかし、電磁石の変調と高周波加速パターンを同期させる必要が無い為、加速勾配を上げることで原理的にはいくらでも速くビームを加速する事が可能である。そのため、通常のシンクロトロンに比べて、加速パターンの観点からも、加速器設計の観点からも自由度が増すと考えられる。ここではそれについて議論を行う。通常のシンクロトロンの場合、一般に加速においてベータトロン振動数が三次程度までの低次の共鳴線を渡るのはビームロスの観点から望ましくないと言われている。これは通常のシンクロトロンの加速時間が 1 秒程度と周回時間に比べて十分に長い為、共鳴線を渡る事によるエミッタンスの増加が無視出来なくなる為である。理想的な FFAG はゼロ色収差を満たすという性質上、原理的にはベータトロン振動数は加速中も一定に保たれる。しかし、実際の FFAG では洩れ磁場の影響、高磁場領域における磁場飽和の影響等により、ゼロ色収差を完全に満たす事は難しい。そこで、FFAG においても通常のシンクロトロンの様に、加速中も共鳴線から十分に離れた範囲にベータトロン振動数が収まるよう磁場の形状等を調整して磁石を設計する。また、non-scaling FFAG の様にゼロ色収差を満たさない様な FFAG シンクロトロンも提案されており、この場合はベータトロン振動数は加速と共に変化して行く。この様に FFAG においても加速中のベータトロン振動数の変化については注意をはらう必要がある。しかし、FFAG の様に速い加速が可能な場合、共鳴線を渡る速さを十分に速く出来れば、エミッタンスの増加も許容できる範囲に収まる為、整数共鳴を渡る加速さえ成立する可能性がある。

表 4: 7.1 のシミュレーションで用いた電子 FFAG の基本パラメータ

磁石形式	Radial sector 型 (Triplet)
セクター数	8
k 値	2.5
エネルギー	50keV(入射) - 500keV(最終)
加速時間	1ms
磁場強度	F 磁石. : 0.14∼0.32 Tesla
	D 磁石. :0.04∼0.13 Tesla
閉軌道半径	0.81 ∼ 1.14m
ベータトロン振動数	水平 : 2.17∼2.22
	垂直 l : 1.24∼1.26
rf 周波数	0.61 ∼ 1.38MHz
rf 電圧	1.3 ∼ 3.0 kVp

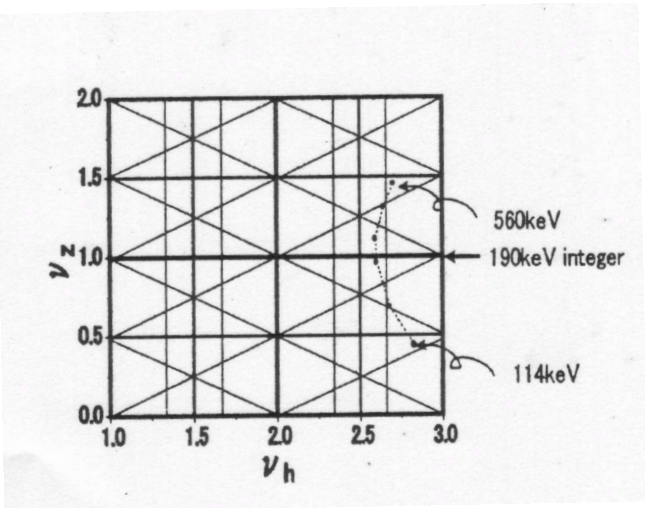


図 21: 表 4 のモデルにおけるチューンダイアグラム

共鳴線を渡る事を避けるのが困難な加速器として半径が非常に小さい FFAG 加速器が上げられる。FFAG に必要な k 値を持った磁石を作る際に磁場の形状を磁極の形で形成しようとすると、必然的に半径内側の磁極と外側の磁極では磁極間隙の大きさが大きく

違って来ることになる。半径が非常に小さい FFAG 加速器では磁極の周方向の長さが磁極間隙と同程度にしかとれない為、洩れ磁場の分布の差による集束力の変化の影響を大きく受ける。結果としてベータトロン振動数が大きく変化する事になる。そこで、表 4 の設計に際して、図 21 に示される様な振動数の変化を示す場合において様々な加速勾配でトラッキングシミュレーションを行い、エミッタンスの増加の度合を調べた。

電磁石のアライメントエラーはゼロと仮定して、上記のリングで 114keV から 230keV まで加速を行った。加速勾配としては 2.0kV/turn の加速をリング全周にわたって連続的に受ける場合とリングのある 1 箇所で 0.1kV/turn 及び 2.0kV/1turn の加速を受ける場合の 3 例に付いてトラッキングシミュレーションを行った。このシュミレーションに用いた粒子の初期分布を図 23 に、ビーム加速中のエミッタンスの変化を図 22 に示す。図 22 よりビームが連続的に加速を受ける場合はリングの対称性が保たれ、共鳴源が存在しないため、エミッタンスの増加は起こらない事が分かる。一方、リングの一箇所で粒子を加速した場合、加速電場によるエネルギーの増加がディスパージョンにより横方向の摂動に変換されるため、エミッタンスの増加が起こっている。また、加速電場が大きい程エミッタンスの増加が抑制されている事も分かる。振動数の変化の速さは磁場と加速電場によって決まり、このシミュレーションの場合、整数共鳴の近傍で 0.1kV/turn の場合 3.7×10^{-4}/turn、2kV/turn の場合 7.3×10^{-3}/turn であった。アライメントエラーを導入して、同様のシミュレーションを試みた場合でも、アライメント精度 0.1mm 磁場強度のバラツキとして 0.1% 程度であればエミッタンスの増加は問題に成らない程度に抑えられている事が分かった。

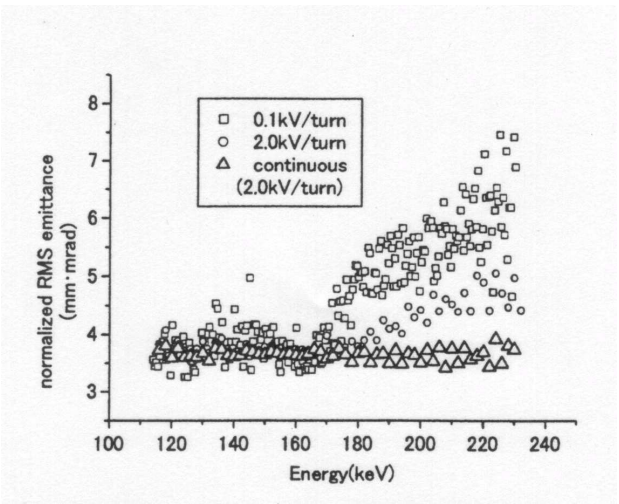


図 22: 加速勾配を変化させた時のエミッタンスの増加

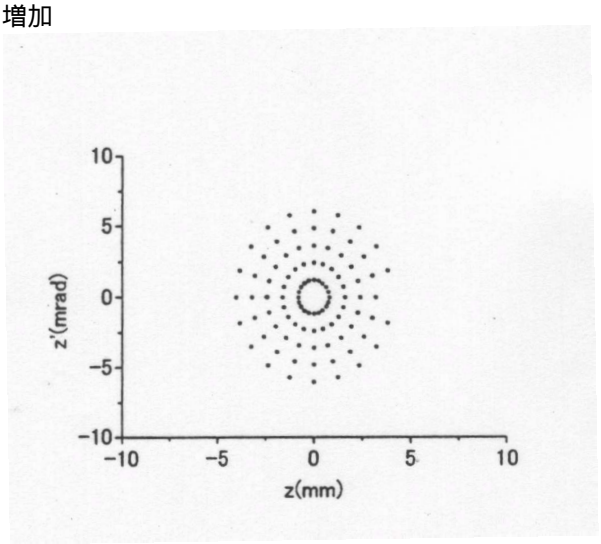


図 23: 図 22 のトラッキングシミュレーションにおける粒子の初期分布

7.2 マルチバンチ加速

FFAG は固定磁場であるため、粒子の運動量に応じて様々な軌道が同時一つのリングの中に存在しうる。すると複数の運動量に対応する様な周波数変調を施す事で図 24 の様に複数のバンチを同時に加速するして、FFAG の平均電流をさらに増大させる事が可能になる [10]。

これについて、後述する PoP FFAG を用いて実証実験を行った。この実験においては最初のバンチの加速開始から 200μs 後に 2 番目の番地の加速を開始した。その実験における縦方向の運動の周波数ス

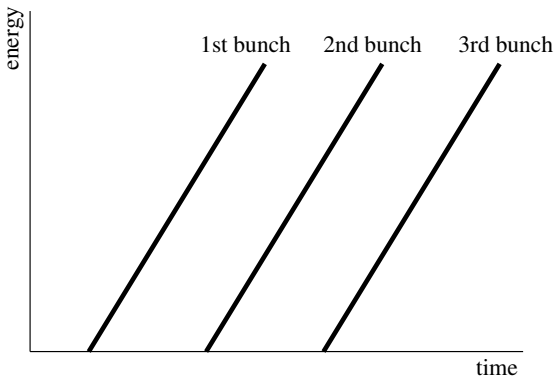


図 24: マルチバンチ加速

ペクトルを図 25 に示す。これか 2 種類の周回周波数をもつバンチがリングの中に同時に存在している事がわかる。

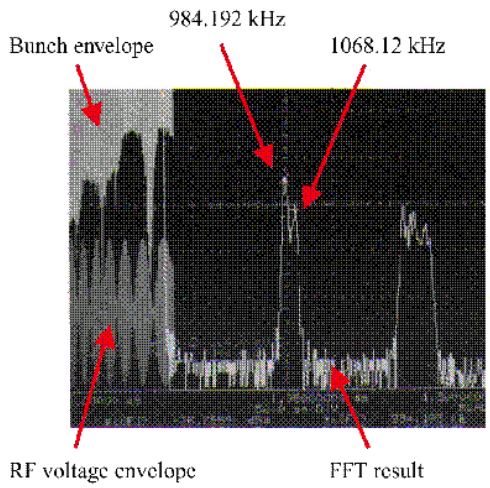


図 25: マルチバンチ加速における縦方向の運動の周波数スペクトル

8 FFAG におけるビーム取り出し

FFAG 加速器の様な速い加速及び高繰り返しが可能な加速器においては速い取り出しが一般に使われる。本節の前半では様々な形式の FFAG における速い取り出しに付いて議論を行い、FFAG の特徴を利用した遅い取り出しに付いて後半で紹介する。

8.1 速い取り出し

キッカー及びセプタムを使用する通常の速い取り出しにおいてはセプタムにおける取り出し軌道と周回軌道の間に十分な距離を取ることが出来るかが決定的に重要になる。簡単の為に一台のキッカーを使用した場合の軌道のズレは

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \phi \tag{85}$$

の様に表される。ここで β_1, β_2 は各々キッカー、及びセプタムの位置での横方向のベータ関数の大きさであり、$\Delta x'$ はキッカーでの蹴り角、ϕ はキッカーセプタム間のベータトロン振動の位相差である。

radial sector 型の FFAG においては 図 9 に典型的な例として示されている様に F 磁極の中央部で β_H 最大、β_V 最小、D 磁極の中央部で β_H 最小、β_V 最大になる傾向がある。この様な場合、DFD、及び FDF triplet を比べた場合、入射取り出しの観点からは FDF triplet の方が有利になる。まず、軌道の分離は β_H 大きさにに比例するため、同じキッカーの蹴り角でも軌道の分離は FDF の方が DFD に比べて大きくなる。また、垂直方向のビームサイズは $\sqrt{\beta_V}$ に比例する為、FDF の方が DFD に比べて必要なキッカーのアパーチャーも小さく出来ることになる。この 2 点の相乗効果により、少なくとも、速い取り出しの様にキッカーによる軌道の分離が重要な物については FDF triplet の方がハードウェア的な要求性能は低く済む事になる。

次に singlet の radial sector 型 FFAG の場合に付いて考えてみる。radial sector FFAG の場合 F 磁極と D 磁極が交互に並ぶという配置をとる。singlet 電磁石の場合、F 磁極と D 磁極の間に各々ストレート

セクションが出来ることになる。この場合、D 磁極は発散磁石の働きを果たす事から、D 磁極の直前にキッカーをおいて軌道の分離をつくってやると、D 磁極の磁場によって更に余分に蹴られることになる。FFAG の磁場においては磁場の変化 ΔB と軌道のずれ Δr の間には $\Delta B/B_0 = k\Delta r/r_0$ の関係が成り立つので、中心軌道より半径外側にずれて D 磁極に入射した粒子はこの磁場勾配の為にさらに外側に蹴り出されることになる。これにより、軌道の分離が余分に出来る事になる為、ビーム取り出しを容易にする事が期待される。

なお、以上の議論はビーム入射に際しても同様に成立する。

8.2 遅い取り出し

通常のシンクロトロンでは多極磁場を追加で導入する事で共鳴を誘起し、それにより安定領域から外れた粒子をセプタム等で切り出す事で遅い取り出しをしている。FFAG においても同様の方法で遅い取り出しを行う事は可能であるが、FFAG の固定磁場の特徴を利用すると別の遅い取り出しの方法も可能になってくる。ここではそれに付いて紹介する [5]。

FFAG においては加速と共にビームが半径外側へと移動して行く。そこで、図 26 に示される様なマスレスセプタム [6] を設置するとどの様な事が生じるかに付いて考える。図 26 のマスレスセプタムによって生成される磁場は図 27 の様になる。ここで注目すべきは磁場の境界面に強い磁場勾配を持った磁場が生じることで、ここをビームの端が通過すると、図 28(a) に示される様に磁場の強さに応じた水平方向のキックを受ける事になる。これは通常の遅い取り出しにおける共鳴で生成される「ひげ」と同じ扱いが出来るので、適当な場所にセプタムを設置してやれば、ビームを取り出す事が出来る (図 28(b))。更に、最初のマスレスセプタムから位相差で 2π の位置にもう一台のマスレスセプタムを設置してやると取り出しの際に残ったひげが蹴り戻されて、元の分布に戻ることになる図 28(c))。これを繰り返す事で FFAG においても通常のシンクロトロンと同様に遅い取り出しが可能になる。

現在、PoP FFAG に一台のマスレスセプタムを設置して実験が行われており、現時点ではマスレスセプタムを通過する事により、ビームが横方向に延びる効果が確認されており、さらなる実験が進行中である。

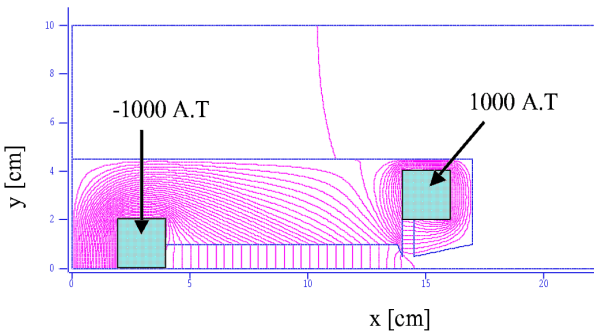


図 26: マスレスセプタムの横断面及び磁束分布

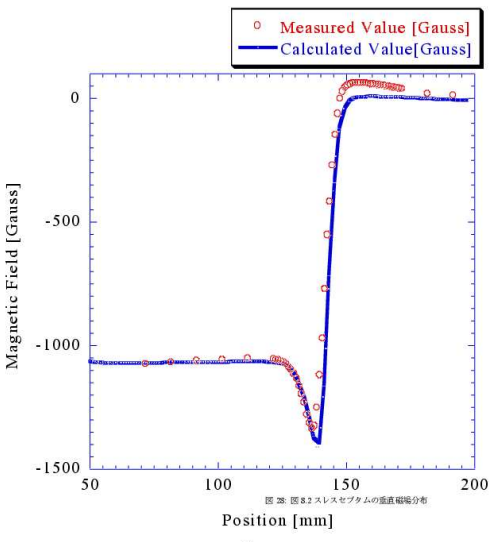


図 27: 図 26 のマスレスセプタムの垂直磁場分布

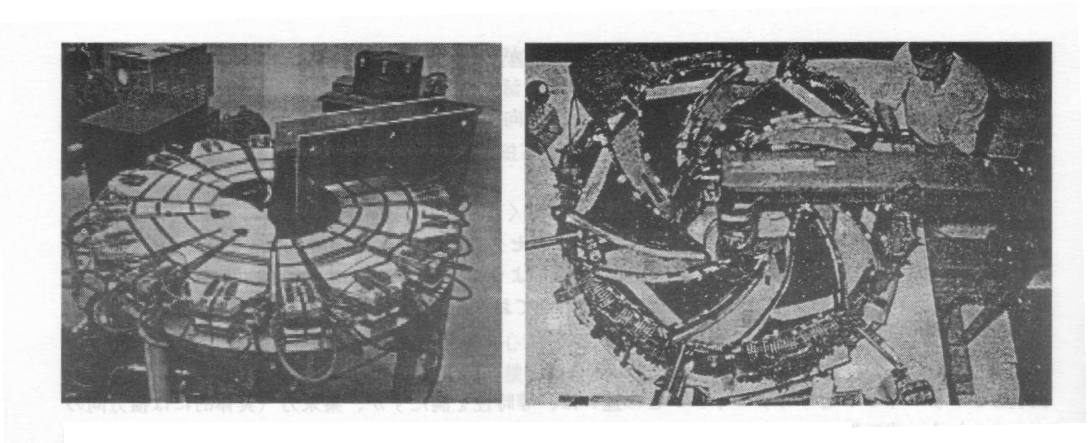


図 29: MURA で作られた radial sector 型 FFAG(左) と spiral sector 型 FFAG(写真右)

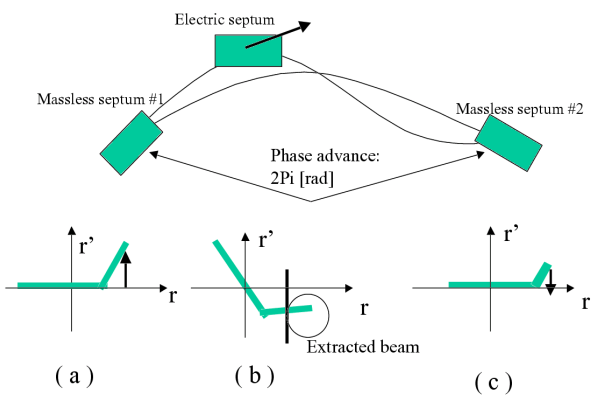


図 28: マスレスセプタムを用いた FFAG における遅いビーム取り出し方法

9 FFAG 開発の歴史

9.1 黎明期

FFAG の開発は 1950 年代後半に MURA(Midwestern University Research Assosiate) において実験機が作られたのが最初である。この時は spiral sector 型 [7] 、radial sector 型 [8] が両方とも開発され、電子を各々180keV 及び 400keV までベータトロン加速により加速することが出来た。(図 29 参照) 今から振り返ると驚くべき事に加速器における非線形力学やカオス的な運動、加速周波数を操作した縦方向の運動の制御等、今日の加速器における研究の大部分が既に行われている。なお、今日の加速器開発において必須のツールである加速器における数値計算シミュレーションのはしりがこの計画で縦方向の運動のコンピュータシミュレーションが初めて行われたと言うのも特記すべき事である。

この様な研究を基に FFAG を使った 30BeV(GeV) 陽子加速器や, 陽子と陽子の衝突型加速器の提案もおこなわれている。衝突型加速器は図 30 に示される様に radial sector 型の FFAG で軌道のうねりの位相を 180 度ずらした逆向きの軌道で陽子ビームをもう一つ走らせて各セクターの間で衝突を起こさせる事を目論んだもので、提案された当時は two beam accelerator と呼ばれていた。

上記の様な 1950 年代後半から 1960 年代初頭にかけての精力的な研究にもかかわらず、MURA の消滅と共に FFAG の研究は途絶えた。当時、開発を断念せざるを得なかった理由は次の 3 点に集約される。

まず第一に当時の加速器開発の主流であったエネルギーフロンティアを目指す為の加速器としては、通常のシンクロトロンに比べて磁石の大きさが大きくなる。FFAG は平均電流を大きくできるという利点があるが、当時の物理はまだ、インテンシティフロンティアという方向はまだ指向されていなかった。

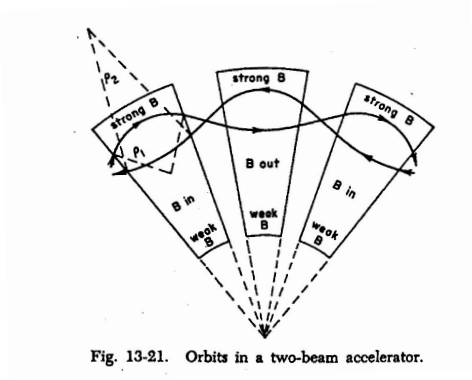


Fig. 13-21. Orbits in a two-beam accelerator.

図 30: two beam FFAG の概念図

エネルギーをあげる為にはシンクロトロンの方が小さな電磁石で済み、FFAG では強集束の利点を最大限に行かす事が出来なかった。

次の問題点として、FFAG は combined function 型の電磁石を用いる為、通常のシンクロトロンに比べて磁場形状が複雑であり、それを実現する為の磁極の形状やコイルの巻き方を 3 次元的に計算する事、また仮にそれが出来たとしても、それを精度良く製作する事が当時の計算機技術、及び工作技術では困難であった。FFAG においては通常のシンクロトロンと異なり、軌道が磁極面に対して傾いて入出射することによる edge foucusing で集束力の無視できない部分を得ている為、フリンジの効果の 3 次元的な評価が出来ないと言うのは加速器設計の上で信頼性に著しい問題があった。この問題は特に形状が 3 次元的である spiral sector 型では重大な問題であった。

最後に高周波加速空洞の問題である。MURA で試験機として作られた FFAG はベータトロン加速を用いていたが、陽子加速機として FFAG を採用する為には高周波空洞の導入が不可欠である。

FFAG の為の高周波空洞には、大口径 (特に水平方向)、高帯域という条件を満たす必要がある。更に高繰り返しという FFAG の特徴を行かすためには、空洞を高繰り返しで運転できる事はもちろん、高加速勾配を発生できる空洞の開発が必要であったが、以上の様な条件を満たす加速空洞は当時は存在しなかった。

9.2 雌伏の日々

エネルギーフロンティアを目指す加速器としてはその後現在に至るまで通常のシンクロトロンが唯一の方法と考えられている。しかし、加速器開発のもう一方の方向である大強度加速器では FFAG は何度か再考される機会があった。

その一つとして 1980 年代には KEK の GEMINI 計画のエネルギーアップを可能にする加速器として佐々木らが FFAG を採用する提案を行っている [11]。同じ頃、アルゴンヌ国立研究所で、次世代のパルス中性子源として FFAG が検討され、ASPUN 計画と名付けられた [12]。また、1990 年代に入ってからは European Spallation Source(ESS) の加速器のオプションとして FFAG が検討された。いずれの計画も要求されるエネルギーは 1 から 3GeV 程度の比較的低エネルギーであるが、強度は $10^{13} \sim 10^{14} pps$ を目指す様な大強度加速器である。

この時点で前述した FFAG 開発初期に問題になった 3 つの問題の内、最初の 2 つはもはや問題とは見なされなくなっていた。第一の問題である到達エネルギーについては前述した新計画においては強度が重要であり、エネルギー自身は比較的低いため、大きな電磁石を必要としなかった。二番めの問題である電磁石設計、及び製作についても、磁場計算コードの発達、及び NC 工作機に代表される高精度工作機械の発達により十分な信頼性をもって電磁石の設計が可能になっていた。しかしながら、最後の問題である高周波加速空洞の問題は未解決であった。上記の計画がいずれもデザインの段階で終ってしまったのはこの高周波加速空洞の開発のメドが立っていなかったというのが一つの大きな理由だと考えられる。

9.3 復活の日

1990 年代後半に入り、高周波加速空洞の分野で一つの大きなブレークスルーが起こった。Japan Hadron Facility(JHF) の加速器の為の高周波空洞としてフェライトの替わりに Magnetic Alloy(MA) を使用した空洞が開発され、陽子加速器用加速空洞の

加速勾配として従来の上限を数倍上げて、50kV/m を達成した [13]。この空洞はこの高加速電場という特徴に加え、Q 値が小さく広帯域なのでバイアス電流を流すことが不要になり、繰り返しを上げる事が容易であること、磁性体のコアは薄い金属テープを巻いて作るため、フェライトに比べて空洞の形状の選択に自由度が大きく、また、大きさに付いても原理的な制限が存在しないなど、FFAG 加速器の為の加速空洞としては最適の特徴を兼ね備えている。

この加速空洞の開発によって、FFAG を再度、現代の加速器技術を用いて開発する事が KEK で計画された。これ以降の展開に付いては後の章で詳述するので、詳細は割愛するが、PoP(Proof of Principle) FFAG という小型の FFAG が実際に開発され、2000 年春から運転に入った。これは陽子を 50keV から 500keV まで高周波加速する世界で最初の陽子 FFAG である。これを用いて 1ms での粒子加速や大アクセプタンスの実証等の興味深い結果が得られ、FFAG の大強度加速器としての可能性の実証に大きな役割を果たした。この成功を受け、実用機としての実証機である 150MeV FFAG 計画、加速機駆動システムの技術開発機としての京都大学原子炉研究所の計画等が動き始めている。

あと、FFAG の速い加速、及び大アクセプタンスという特徴を利用した二次粒子加速器としての計画も提案されている。代表的なものが大強度ミュオン源の為の位相回転リングとして FFAG を用いる PRISM 計画、及びその発展としての ニュートリノファクトリー等である。このように、40 年前に一度途絶えた FFAG であるが、今日、その特徴をいかして大強度加速器、及び二次粒子加速器として、様々な開発計画が動いている。

10 KEK における FFAG の開発

現時点では FFAG シンクロトロンの実機の開発は KEK でしか行われていない。この節では現時点における KEK での FFAG の開発とそれにより得られた結果について紹介する。

10.1 PoP FFAG

JHF 加速器の為の MA を使用した高周波加速空洞の開発の成功を受けて、大強度陽子加速器としての FFAG シンクロトロンの開発が計画された。具体的には最終エネルギー 1MeV 程度、加速時間 1m、直径 2、3m 程度の FFAG を原理実証機として開発すると言うことであった。この FFAG を PoP(Proof of Principle) FFAG と呼ぶ。計画の目標としては

1. FFAG 加速機の原理を再確立すること。
2. FFAG シンクロトロンの設計手法を確立すること。
3. 速い加速等の実証を通して FFAG シンクロトロンの陽子加速機としての可能性を実証すること。

以上 3 点であった。

設計作業は 1998 年末から始まった。開発当初は spiral sector 型、radial sector 型の両方で検討が進められていたが、ベータトロン振動数の安定性等の観点から、最終的には radial sector 型で設計が進められる事になった。最終的なマシンパラメータを表 5 にまとめた。2000 年初頭から 200 年春にかけて建設が行われ、建設終了と共に加速器実験が開始された [14]。PoP FFAG の概略図、及び写真を図 31,32 に示す。 なお、高周波加速空洞には前述した MA 加速空洞が採用された。また、静電セプタム、静電バンプを用いて位相空間ペインティング入射を行う事でビーム強度を 5 倍以上に増大させる事が可能になっている。

PoP FFAG で行われた実験全体の詳細は割愛するが、その中で重要な結果に付いて、以下で紹介する。

10.1.1 ベータトロン振動数の測定

FFAG 加速器の様な固定磁場加速器の場合、磁場設計が加速器の成否の鍵を握ると言っても過言ではない。磁場設計、及びその磁場を使った加速器の設計がうまく言っているかどうかは次の 2 点で確かめられる。

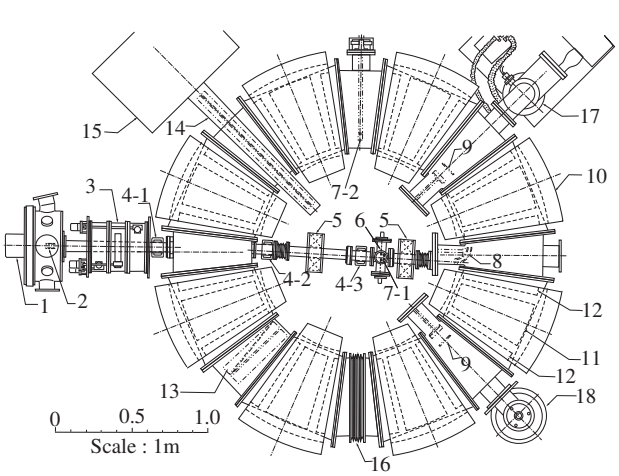


図 31: PoP FFAG の概略図

表 5: POP FFAG マシンパラメータ

磁石形式	Radial sector 型 (Triplet)
セクター数	8
k 値	2.5
加速粒子	陽子
エネルギー	50keV(入射) - 500keV(最終)
加速時間	1ms
磁場強度	F 磁石. : 0.14∼0.32 Tesla
	D 磁石. :0.04∼0.13 Tesla
閉軌道半径	0.81 ∼ 1.14m
ベータトロン振動数	水平 : 2.17∼2.22
	垂直 l : 1.24∼1.26
rf 周波数	0.61 ∼ 1.38MHz
rf 電圧	1.3 ∼ 3.0 kVp

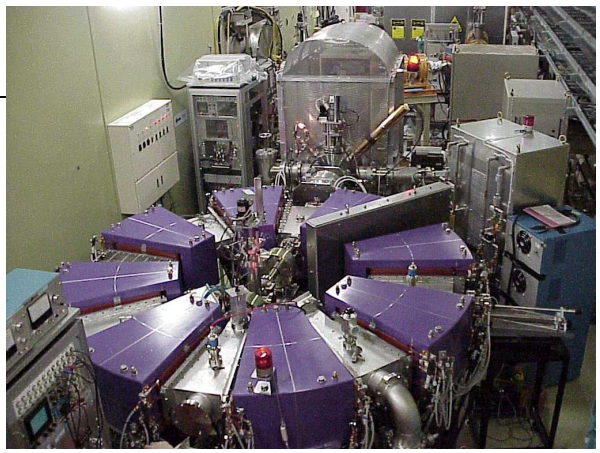


図 32: PoP FFAG 全体像

- FFAG 電磁石の磁場測定
- ベータトロン振動数の測定

まず、磁場測定であるが、PoP FFAG においても 5.4 で紹介した 150MeV FFAG と同様の磁場測定を行い、誤差 1% 程度で設計値と一致している事が確かめられた。磁石単体としての信頼性については磁場測定で確認できたので、次に加速器として組み合わせた時はどうなるかをベータトロン振動数の測定として実験した。 実験内容としては、入射軌道におけるベータトロンチューンを FD 比の関数として測定し、計算値との比較を行った。結果を図 33 に示す。ベータトロン振動数の絶対値として比較すると、1% 程度の誤差で一致していた。これにより、少なくとも入射軌道においては FFAG の設計は十分な信頼性をもってなされていると結論して良いと思われる。

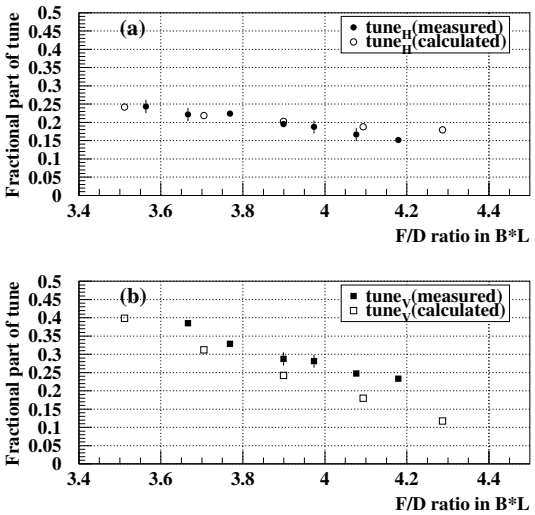


図 33: PoP FFAG の F/D 比を変化させた時の入射エネルギーにおけるベータトロン振動数の変化 (a) 水平方向、(b) 垂直方向

10.1.2　速い加速の実証

次に FFAG の特長である速いビーム加速の実証実験について紹介する。

FFAG においてはビーム位置を半径方向内側と外側の二枚一組のピックアップ電極に誘起される電荷量を測定することで算出する。粒子を 50keV から 500keV まで加速した時の各々のピックアップにおける信号, 及び、これを処理して、位置と時間の関係に焼き直した図を 34 に示す。これから、加速が 1ms で終っていること、また、加速に伴い、軌道位置が移動して行く事が見て取れる。これにより、FFAG において速いビーム加速が可能であると言うことが実証出来たことになる。

10.1.3　ゼロ色収差の検証

前節で入射軌道におけるベータトロン振動数の測定により、少なくとも入射軌道において磁場分布は三次元磁場計算で十分正確に計算出来ている事が分かった。しかし、FFAG の特徴であるゼロ色収差を検証するにはこれだけでは不十分で粒子を加速して様々なエネルギーでのベータトロン振動数の測定を行ってやる必要がある。

また、おいては入射バンプでの蹴り角を変える事で水平方向の入射エラーを調整する事ができる。これを用いて、10.1.1 節の実験においては大振幅のベータトロン振動を入射時に誘起してやることでベータトロン振動の測定を可能にしていた。しかし、加速に伴い、この様な横方向の振動が急激に減衰してしまう為、別の方法で加速後にベータトロン振動を誘起してやる必要がある。そこで、rf ノックアウト法を用いて [15] 加速後にベータトロン振動と誘起してやり、ゼロ色収差の検証を行った。結果を図 35 に示す。実験値は予想値と誤差の範囲内で一致している。これにより、PoP FFAG の磁場は大域的にゼロ色収差の条件を満たしていること、また、三次元磁場計算、及びトラッキングシミュレーションによる軌道計算を元にした FFAG の設計手法の信頼度も確認出来たことに成る。

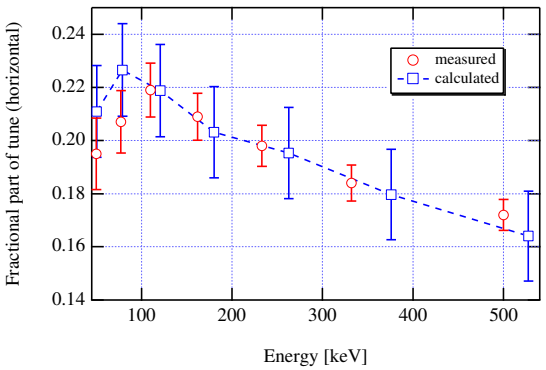
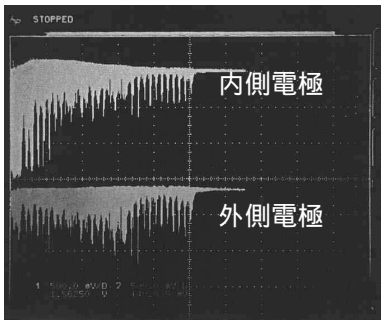


図 35: PoP FFAG での様々な最終エネルギーでのベータトロン振動数

10.1.4　水平方向のアクセプタンスの測定

前術したように PoP FFAG では入射バンプでの蹴り角を調整する事で水平方向の入射エラーを作って様々な振幅のベータトロン振動を誘起する事が出来る。そこで、入射エラーの大きさを変えて、各々

(a)



(b)

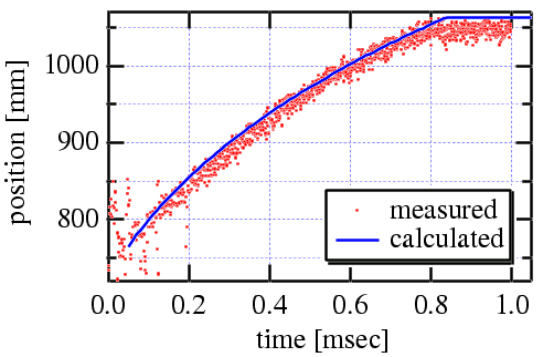


図 34: FFAG の加速のおけるビーム位置モニターの信号 (a) 及び算出されたビーム位置 (b)

の場合で水平方向のベータトロン振動を観測してみた。結果を図 36 に示す。これを位相空間の分布に焼き直す。実空間方向の振幅は図 36 から読み取れ、また角度方向の振幅は各々の場合のバンプでの蹴り角から評価出来る。

位相空間中での実験値の分布をトラッキングシミュレーションにより得られたアクセプタンンスの上に重ねて図 37 に示す。これにより、入射軌道での水平方向のアクセプタンスは $5000\pi\mathrm{mm}\cdot\mathrm{mrad}$. 以上と評価できる [16]。 PoP FFAG の現在の入射軌道でのアクセプタンスは入射セプタムで制限されており、実際のアクセプタンスはぞれよりさらに大きいと言うことがトラッキングシミュレーションより示唆されている。

この他にもすでに紹介したマスレスセプタムを使った遅い取り出しの予備実験、マルチバンチ加速等の興味深い結果をもたらし、FFAG シンクロトロンの加速器としての可能性を内外に示すことができたと言う意味で極めて意義深い加速器であると評価できる。

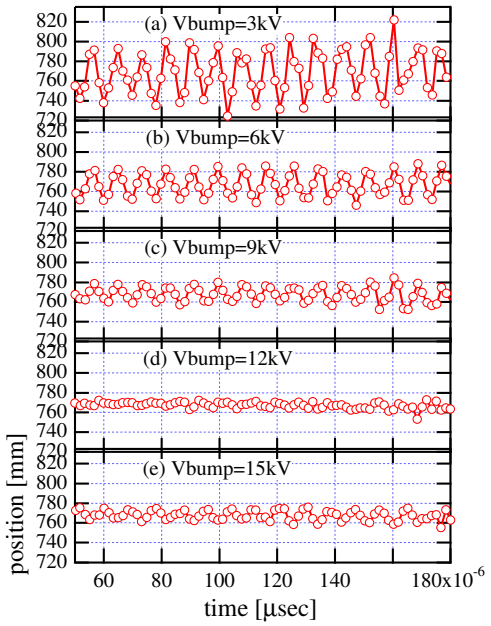


図 36: 入射エラーを変えた時の水平方向のベータトロン振動

10.2 150MeV FFAG

PoP FFAG の成功を受けて、実用機のプロトタイプとして陽子と 150 MeV まで加速できる大型の FFAG(以下 150 MeV FFAG と呼ぶ) の建設が計画された。この計画の目的は以下の通りである。

- FFAG の実用加速器としての可能性を実証する。
- FFAG からのビーム取り出しの実証する。
- 高繰り返し運転の実証する。
- 医療用 FFAG の試験機として、癌治療の為のスポットスキャン照射等の技術開発を行う。

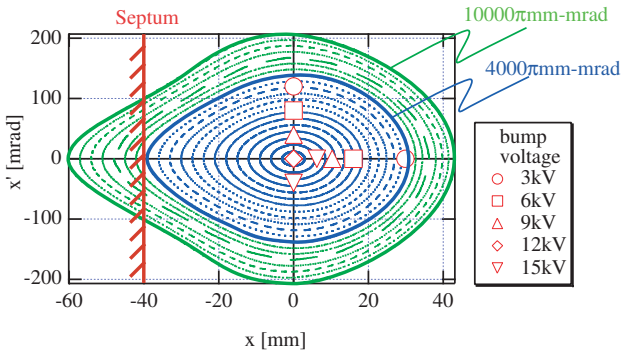
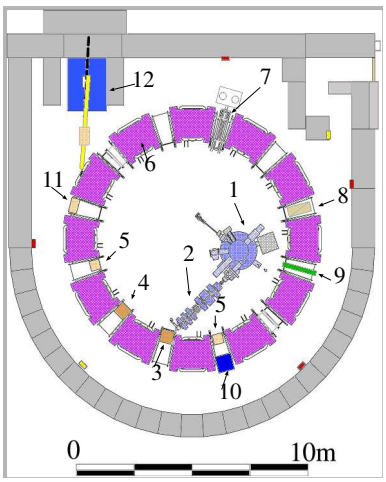


図 37: PoP FFAG の入射軌道における水平方向アクセプタンス

表 6 に 150MeV FFAG のマシンパラメータをまとめた。この加速器ではビーム取り出しが目的の一つである。その為、新たにヨークフリー電磁石 (5.1.1 章参照) を開発した。

加速器の設計は 2001 年から開始された。建設は 2002 年夏から始まり、2003 年春に完了し、現在実験が進行中である。図 3839 に 150MeV FFAG の全体図を示す。



1. Injection cyclotron
2. Injection line
3. Injection septum magnet
4. Injection ES septum
5. Bump maget
6. Triplet magnet
7. RF cavity
8. Beam position monitor
9. Current monitor
10. Extraction kicker
11 Extraction septum
12 Beam dump

図 38: 150MeV FFAG の概略図

表 6: 150MeV FFAG マシンパラメータ

磁石形式	Radial sector 型 (Triplet)
セクター数	12
k 値	7.6
加速粒子	陽子
エネルギー	10MeV(入射) - 125keV(最終)
	12MeV(入射) - 150keV(最終)
加速時間	10ms
繰り返し	100Hz
磁場強度	F 磁石. : 0.14∼0.32 Tesla
	D 磁石. :0.04∼0.13 Tesla
閉軌道半径	4.4 ∼ 5.1m
ベータトロン	水平 : 2.17∼2.22
振動数	垂直 l : 1.24∼1.26
rf 周波数	1.6 ∼ 5MHz

図 39: 150MeV FFAG 全体像

11 FFAG の未来

速い加速、大アクセプタンスという FFAG の特徴から、FFAG 加速器の様々な分野への応用が提案されている。その中で代表的な例を 2、3 紹介する。

11.1　二次粒子加速器

パイオンやミュオン等の二次粒子は陽子等の一次ビームを標的に当てる事によって生成される。したがって、生成後のビームサイズ及びエネルギーの広がりは極めて大きく、また、反陽子以外の二次粒子はもっとも寿命の長いミュオンですら $2\mu s$ 程度の不安定粒子であるため、従来、ビーム加速の対象にはなっていなかった。しかし、FFAG の大アクセプタンス、及び速い加速という特長を利用すれば、二次粒子をそのまま加速する事が可能になってくる。その中で代表的なアイデアを二つ紹介する。

11.1.1　PRISM

PRISM(Phase Rotated Intense Slow Muon) 計画は次世代の大強度ミュオン源として注目を浴びている。これはシンクロトロン振動を利用して、位相空間回転 (phase rotation)(図 40 参照) を行い、ミュオンビームの高輝度化を目論んだ計画である [17]。図 41 に示される様にこの為の位相空間回転リングに FFAG を採用する事を計画している。このリングでは 1MV/m という高加速勾配を発生する MA 加速空洞を用い、リングへの入射から $1\mu s$ 程度の時間内で、68 ± 15MeV/c のミュオンビームを 68 ± 2MeV/c 以下になる様に位相空間回転を完了させ、実験に供する。最終的なミュオン強度として J-PARK 主リングの最大ビーム (750kW) を用いて 10^{11}/秒 以上を目標にしている。因みに現時点での世界最高輝度のミュオンビームで 10^{8}/秒である。

リング単体の設計、建設は 5 か年計画で 2003 年から開始された。

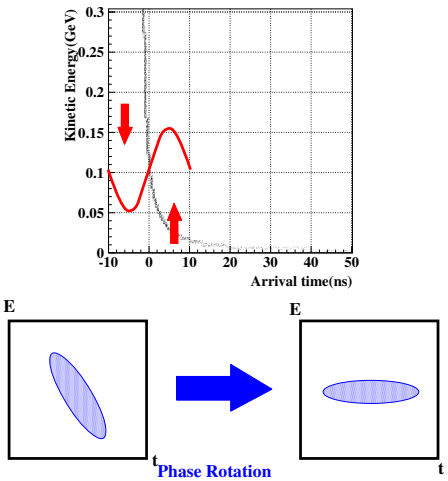


図 40: 位相空間回転の原理

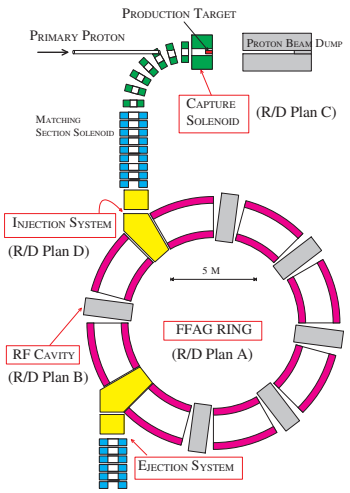


図 41: PRISM の概略図

11.1.2　ニュートリノファクトリー

ミュオンビームの加速器計画として近年国際的な議論がなされているものに、ニュートリノファクトリー (ミュオンコライダー) 計画がある。これは陽子ビームを一次ビーム標的に当てて生成されるミュオンを位相空間回転、ミュオン冷却を通して高輝度化した後に加速を行い、ミュオン蓄積リングで蓄積して、ミュオンが崩壊してできたニュートリノビームを実験に供する、または、ミュオンビーム同士を衝突させてエネルギーフロンティアの実験を行うという計画である。

この計画における現時点でのボトルネックであるミュオン冷却を大アクセプタンス、及び速い加速という FFAG の特長を行かして省略し、ニュートリノファクトリーに特化した加速器を建設するというアイデアが日本のグループにより提案されている [18]。

これは 0.3GeV/c から 20GeV/c までを 4 つの FFAG で加速するもので、(図 42 参照) J-PARK の最大強度、750kW のビームを用いて ミュオン蓄積リングのストレートセクション 1 つあたり 10^{20}/ 年 のミュオン崩壊を起こす事を目標にしている。これについては現在、加速器のラティス設計、FFAG 磁石の超電導化などの検討か成されている。

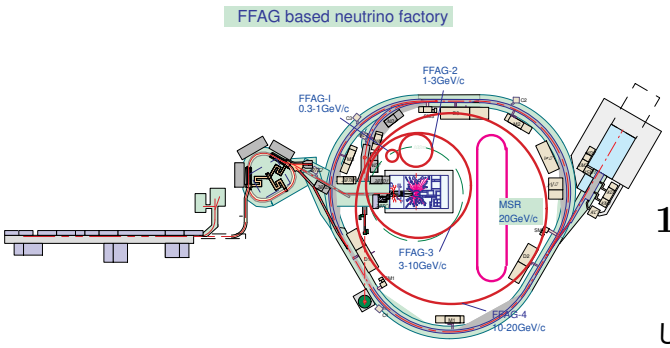


図 42: FFAG ニュートリノファクトリー@J-PARK

11.2 加速器駆動システム

加速器駆動システム (ADS) とは核消滅処理や未臨界原子炉等、加速器から出て来るビームを直接利用するシステムの総称である。この用途に使う加速器には (1) 大強度,(2) 高信頼性,(3) 高効率 といった特長が要求される。従来は LINAC が有力視されてきたが、最近建設コストの観点から FFAG が注目されてきている。未臨界原子炉実証試験用加速器の建設計画が京大原子炉実験施設の将来計画として 2002 年度から開始された。計画では 3 組の FFAG リングを用いて陽子ビームを 200MeV 程度まで加速し、未臨界原子炉の技術開発に用いる。

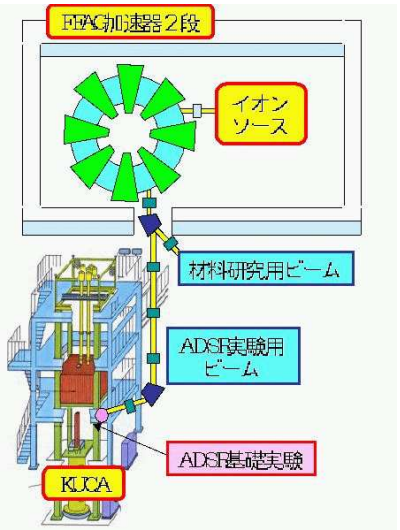


図 43: 京大原子炉 ADS 計画の概念図

12 まとめ

FFAG は 1950 年代に提案され、一度開発が中断した固定磁場型の加速器である。近年の技術開発により、大強度、低コストな加速器としての側面が見直され、KEK での PoP FFAG により、実用加速器としての将来性が認識され、近年盛んに開発がなされる様になった。

これまでの研究により、設計手法の確立、速い繰り返し、大アクセプタンスの実証等、数々の興味深い結果がもたらされた。現在では、医療などの民生利用だけでなく加速器駆動システムや二次粒子加速器として可能性も認識され、その将来は洋々と開けている。

また、加速器そのものとしても非線形性が強い系におけるビーム力学の問題、固定磁場という事を利用した rf による縦方向のビーム制御の問題など多くの興味深い問題を秘めた加速器として今後もますます活発な研究開発が進められると思われる。

参考文献

[1] K. R. Symon et. al, Phys. Rev. 103(1956)1837

[2] T. Ohkawa, Symosium on Nuclear Physics of the Physical Society of Japan, 1953

[3] D. K. Kerst et. al, Phys. Rev. 98(1955)1152

[4] M. A. Green,"A Design for a Combined Function Superconducting Dipole for a Muon Collider FFAG Accelerator, Proc. of EUCAS-99,1999

[5] Y. Yonemura et. al., "Beam extraction of the PoP FFAG with a massless septum, Proc. of Particle Accelerator Conference ,2003

[6] J.Liu et al., Proc. of the Advanced Hadron Facility Accelerator Design Workshop, 1998

[7] D. K. Kerst et. al, Rev. of Sci. Instr. 31(1960)1076

[8] F.. T. Cole et. al, Rev. of Sci. Instr. 28(1957)403

[9] 湯浅由将 "FFAG 加速器用電磁石の磁場測定"、原子核研究 Vol 46, No. 6, 2002

[10] K. Koba et. al., "Multi-Beam Acceleration in FFAG synchrotron, Proc. of Particle Accelerator Conference ,2001

[11] H. Sasaki, GEMINI Design Report, KEK, 1990

[12] R. L. Kustom et al., IEEE Trans. on Nucl. Sci. Vol. NS32, No 5, 985, p1076

[13] Y. Mori et al., A new typr of rf cavity for high intensity proton synchrotron using high permeability magnetic alloy, Proc. of European Particle Accelerator Conference, 1998

[14] Y. Sato et. al., "Development of a FFAG proton Synchrotron, Proc. of European Particle Accelerator Conference ,2000

[15] L. W. Jones et al, "Comparison of Experimental Results with the theory of radio frequency acceleration processes in FFAG accelerators",Advances in high energy particle accelerators

[16] M. Yoshimoto et. al., "Recent Beam studies of the PoP FFAG proton Synchrotron, Proc. of Particle Accelerator Conference ,2001

[17] J-PARK Letter of Intent L24, "The PRISM projec –A muon source of the World-Highest Brightness by Phase Rotation"

[18] J-PARK Letter of Intent L27, "A Study of a Neutino Factory in Japan(Nufact-J)"